N° CNRS : A.O.12.935

THESE DE DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Mathématiques

présentée

à l'Université Pierre et Marie Curie

Paris VI

par Monsieur Chérif BADJI

pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences

Sujet de la thèse :

"Sur une méthode de géométrie différentielle dans la théorie des intégrales harmoniques sur les variétés kählériennes à bord pseudo-convexe".

Soutenue le Octobre 1976

devant le jury composé de :

André AVEZ

Louis BOUTET de MONVEL

Pierre DOLBEAULT

André LICHNEROWICZ

Jean VAILLANT

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548124_0004

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A la mémoire de mon père.

REMERCIEMENTS

A mon directeur le Professeur André LICHNEROWICZ, sans l'aide duquel ce travail n'aurait vu le jour, j'exprime ma profonde gratitude.

Durant ce travail, j'ai eu des entretiens fréquents et fructueux avec le Professeur Louis BOUTET de MONVEL. Il m'a fait des suggestions et des remarques intéressantes, a eu la rude tâche de lire le manuscrit et m'a signalé d'importantes lacunes. Je lui témoigne respect et reconnaissance.

Le Professeur André AVEZ, qui m'a donné le second sujet, le Professeur Jean VAILLANT, qui a guidé mes premiers pas en analyse fonctionnelle à la Faculté des Sciences de Lille, et le Professeur Pierre DOLBEAULT m'ont fait l'honneur d'être membres du jury de cette thèse. Je leur exprime également ma reconnaissance.

Enfin, j'adresse mes remerciements à mes frères pour leur soutien matériel et moral, à l'ami Amadou TOURE qui m'a été d'un heureux secours pour l'impression de cette thèse, à Madame LE TOULLEC qui a dactylographié le manuscrit, à tous les camarades et amis pour leur soutien moral.

INTRODUCTION

La tentative de généraliser aux variétés ouvertes la théorie des intégrales harmoniques sur les variétés complexes compactes (Théorie de Hodge) conduit à un problème à valeurs au bord, sans contrainte, pour l'opérateur de Laplace-Beltrami complexe : le $\bar{\partial}$-problème de Neumann.

Nous considérons ce problème pour les formes de type (p,q) à coefficients dans F sur les sous-variétés ouvertes, relativement compactes $M \subset\subset M'$ de variétés kählériennes M' de dimension complexe n , F désignant un fibré holomorphe en droites complexes au-dessus de M'.

En plus des méthodes habituelles des espaces de Hilbert (voir K.O. FRIEDRICHS[6], GAFFNEY[7], KOHN[12], KOHN et ROSSI[15], nous introduisons la "méthode de géométrie différentielle" de KODAIRA[10].

L'usage de cette dernière méthode npus permet d'affaiblir les hypothèses sur la convexité de Lévi et de démontrer une inégalité du type de Gårding (Théorème 3.2.74) , d'où une généralisation des résultats de (12), (13) et (15)

Nous en donnons donc une solution détaillée pour les (p,q)-formes sur les variétés kahlériennes $M \subset\subset M'$ à bord pseudo-convexe de classe C^∞, telles que la classe caractéristique $C(F)$ de F contienne une (1,1)-forme réelle d-fermée γ "suffisamment définie positive", pourvu que $1 \leqslant q \leqslant n$.

Diverses applications de la solution ont été faites, entre autres la solution du problème de Bochner pour les formes à coefficients dans F.

Le travail est divisié en cinq chapitres.

Le chapitre I se compose essentiellement de généralités sur les variétés analytiques complexes, les variétés kählériennes , la première classe de CHERN et de notations. Le chapitre II consiste en un rappel de résultats classiques d'analyse fonctionnelle des opérateurs sur les variétés en particulier les lemmes de Sobolev et Rellich (Lemme 2.2.6) et la proposition (2.4.3.) concernant les opérateurs de différence finie.

Dans le paragraphe 1 du chapitre III, après des généralités sur les opérateurs de Hilbert sur les variétés, nous posons le $\overline{\partial}$ - problème de Neumann pour les (p,q)-formes à coefficients dans F sous sa forme classique. Le paragraphe 3 , quant à lui , concernne la solution de ce problème sur les variétés kählériennes $M \subset\subset M'$ à bord bM pseudo-convexe ce classe C^{∞} , telles que la classe caractéristique $C(F)$ de F contienne une (1,1)-forme réelle d-fermée γ "suffisamment définie positive". L'inégalité de Gårding (theorème (3.2.74) nous a facilité la démonstration du théorème d'isomorphisme (théorème 3.2.77) et du théorème de régularité intérieure et au bord de M (théorème 3.2.103) et, partant, celle du théorème d'existence et de régularité pour le $\overline{\partial}$- problème (théorème 3.2.117)

Le chapitre IV est une première application de notre solution. Nous y considérons d'abord le problème de la représentation de la $\overline{\partial}$ - cohomologie $H_{(p,q)}(M,F)$ par des formes harmoniques $K_{(p,q)}(M,F)$ sur une variété kählérienne $M \subset\subset M'$ à bord bM de classe C^{∞}.

Le résultat suivant a été obtenu : si $M \subset\subset M'$ est une variété kählérienne de dimension complexe n, à bord bM pseudo-convexe de classe C^{∞} et si la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée γ "suffisamment définie positive" , on a $H_{(p,q)}(M,F) \simeq K_{(p,q)}(M,F)$ pour $q \geq 1$.

Ensuite, on en déduit en vertu du lemme (3.2.58) la généralisation suivante du "vanishing theorem" de Kodaira :

Sous les hypothèses du théorème ci-dessus $H_{(p,q)}(M,F) = 0$ pourvu que $1 \leq q \leq n$.

De même, soit K le fibré canonique au-dessus de M' et soit K^* son dual. Nous avons le théorème de nullité suivant :

Si $M \subset\subset M'$ est une variété kählérienne de dimension complexe n , à bord bM pseudo-convexe de classe C^{∞} et si la classe caractéristique $C(F \otimes K^*)$ de $F \otimes K^*$ contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma > 0$, alors, on a $H_{(o,q)}(M,F) = 0$, $1 \leq q \leq n$.

Dans la première partie du chapitre V, nous avons montré une sorte de dualité de Serre". Plus précisément , si $M \subset\subset M'$ est une variété kählérienne de dimension complexe n, à bord pseudo-convexe de classe C^{∞} et si la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée γ "suffisamment "définie positive", alors les espaces $H_{o(n-p,n-q)}(M,F^*)$ et $H_{(p,q)}(\overline{M},F)$

sont en dualité pourvu que $1 < q < n$, où $H_{o(n-p,n-q)}(M,F^*)$ désigne le groupe de $\bar{\partial}$ - cohomologie des $(n-q,n-q)$-formes à coefficients dans le dual F^* de F et à support compact (dans M) , et $H_{(p,q)}(\bar{M},F)$ celui des (p,q)-formes à coefficients dans M, C^∞ sur la fermeture $\bar{M}$ de M.

Enfin, sous les hypothèses de notre théorème de nullité (voir plus haut), nous avons donnë dans la partie II une solution du problème de Bochner pour les (p,q)-formes à coefficients dans F , généralisant ainsi le théorème 2.3.2' de HÖRMANDER[8], pourvu que $q \geqslant 0$.

Chaque chapitre est précédé d'une bref résumé destiné à mettre en évidence son contenu.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES

Le présent chapitre est un bref rappel de résultats classiques sur les variétés kählériennes et la première classe de CHERN d'un fibré holomorphe en droites complexes. Pour plus de détails, se référer à Koidara et Morrow[11]. A la fin de ce chapitre, un théorème et un lemme (Théorème 1.2.45 et lemme 1.2.49) utiles pour le développement du chapitre III sont donnés.

1 - VARIÉTÉS COMPLEXES

Nous adopterons ici la définition de Weil[21].

Une variété à structure analytique complexe de dimension complexe n est un espace topologique séparé M, à base dénombrable, muni de la donnée pour tout $x \in M$ d'une classe de fonctions à valeurs complexes, dites holomorphes (analytiques complexes), définies chacune dans un voisinage ouvert de x, de façon a satisfaire à l'axiome :

$\forall\, x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et une application ψ_U de U dans $\mathbb{C}^n$, ayant les propriétés suivantes :

a) $\psi_U : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

b) Soit x' un point de U, V un voisinage ouvert de x' ; alors, pour que ψ_V, définie dans V, soit holomorphe en z, il faut et il suffit que $\psi_V \circ \psi_U^{-1}$ le soit en $\psi_U(x)$ (c'est-à-dire dans un voisinage de $\psi_U(x)$ dans $\mathbb{C}^n$).

L'application $\psi_U : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ ainsi définie s'appelle carte de U ; si l'on a

$$\psi_U(x) = (z_1(x), \ldots, z_n(x))$$

On dit que les z_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, qui sont les fonctions holomorphes dans U en vertu de l'axiome, forment un système de coordonnées locales dans U .

Une structure analytique complexe sur M est fréquemment définie au moyen de la donnée d'un recouvrement $\{U_i\}$ de M, et, pour chaque U_i, d'une carte, c'est-à-dire d'un système de coordonnées locales (cf. A. WEIL [21] et G. de RHAM[24].

On sait que la donnée sur M d'une structure analytique complexe de dimension complexe n implique celle d'une structure analytique réelle de dimension complexe 2n.

Rappelons également que la donnée sur M d'une structure analytique réelle implique celle d'une structure différentielle de même dimension, définie par les mêmes coordonnées locales (cf. A. WEIL[21]).

Dans toute la suite, nous supposerons que M est une variété analytique complexe connexe de dimension complexe n.

Soit $\psi_U : z \in U \longrightarrow \{z^k\} \in \mathbb{C}^n$ $(k = 1, 2, .., n)$, un système de coordonnées locales complexes défini sur un domaine U de M ; en posant $z^k = x^k + i\,y^k$, les x^k, y^k forment un système de coordonnées locales réelles (pour la structure C^∞ sous-jacente à la structure donnée) dans le même voisinage de z dans M .

Sur l'intersection $U \cap V$ des domaines de deux systèmes de coordonnées complexes, les coordonnées complexes $\{z^k\}$ du même point z de U sont des fonctions holomorphes à jacobien $\dfrac{\partial(z^1,\ldots,z^n)}{\partial(z'^1,..,z'^n)} \neq 0$ du même point z dans V.

J ($J^2 = -Id$) désignera l'opérateur de structure complexe sur les vecteurs tangents en z à M, où Id est l'application identité.

Soit $\mathcal{A}_{p,q}$ le faisceau des germes des formes C^∞ de type (p,q) à valeurs complexes. Alors, les sections $\Gamma(M, \mathcal{A}_{pq})$ de $\mathcal{A}_{pq}$, c'est-à-dire le module des formes C^∞ de type (p,q) à valeurs complexes sur l'anneau des fonctions C^∞ à valeurs complexes sur M, sera noté $\mathcal{A}_{pq}(M)$.

Sur $\mathcal{A}_{pq}(M)$ nous avons les propriétés classiques suivantes (voir CHERN [4]) :

(1) si $\psi \in \mathcal{A}_{pq}(M)$; alors $\overline{\psi} \in \mathcal{A}_{qp}(M)$

(2) si $\varphi \in \mathcal{A}_{pq}(M)$, $\psi \in \mathcal{A}_{r,s}(M)$, alors $\varphi \wedge \psi \in \mathcal{A}_{p+r,\,q+s}(M)$.

(3) $\mathcal{A}_{pq}(M) = 0$ si p ou q > n.

Soit d l'opérateur de dérivation extérieure sur les (p,q)-formes On sait que d se décompose en la somme directe

$$d = \partial + \bar{\partial} ,$$

où $$\partial : \mathcal{A}_{p,q}(M) \longrightarrow \mathcal{A}_{p+1,q}(M) ;$$

$$\bar{\partial} : \mathcal{A}_{pq}(M) \longrightarrow \mathcal{A}_{p,q+1}(M)$$

De plus, on a

$$d^2 = 0 , \quad \partial^2 = 0 , \quad \bar{\partial}^2 = 0$$

Si $\{z^k\}$, $1 \leq k \leq n$, sont des coordonnées locales holomorphes, posons

$$\bar{z}^k = \overline{z^k}$$

Alors, on sait que si $\psi \in \mathcal{A}_{p,q}(M)$, en termes de coordonnées locales holomorphes, ψ s'exprime par :

$$\psi = \sum_{\substack{\alpha_1 < \ldots < \alpha_p \\ \bar{\beta}_1 < \ldots < \bar{\beta}_q}} \psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q} \, dz^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{\beta_q} \tag{1.1.1}$$

Nous utiliserons, pour simplifier nos formules, la notation suivante :

$$\psi = \sum_{A\bar{B}} \psi_{A\bar{B}} \, dZ^A \wedge d\bar{Z}^B \tag{1.1.2}$$

où A désigne la p-uple ordonné croissant $(\alpha_1 \ldots, \alpha_p)$ et B le q-uple ordonné croissant $(\beta_1, \ldots, \beta_q)$ et

$$\begin{aligned} dZ^A &= dz^{\alpha_1} \wedge dz^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge dz^{\alpha_p} \\ d\bar{Z}^B &= d\bar{z}^{\beta_1} \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge d\bar{z}^{\beta_q} \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Il vient alors

$$\partial\psi = \frac{\partial}{\partial z^k} \psi_{A\bar{B}} \, dz^k \wedge dZ^A \wedge d\bar{Z}^B$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi &= \frac{\partial \psi_{A\bar{B}}}{\partial \bar{z}^k} \, d\bar{z}^k \wedge dZ^A \wedge d\bar{Z}^B \\ &= (-1)^p \sum \epsilon_{kB}^J \frac{\partial \psi_{A\bar{B}}}{\partial \bar{z}^k} \, dZ^A \wedge d\bar{Z}^J , \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

où ϵ^{J}_{kB} est le signe de la permutation échangeant $(k, \beta_1, \ldots, \beta_q)$ en $J = (\beta_1, \ldots, \beta_{q+1})$ (où $\beta_1 < \ldots < \beta_{q+1}$) si

$$\{ k, \beta_1, \ldots, \beta_q \} = \{ \beta_1, \ldots \beta_{q+1} \}.$$

De même on a

$$\partial\psi = \sum \epsilon^{I}_{kA} \frac{\partial \psi_{A\bar{B}}}{\partial z^k} \, dZ^I \wedge d\bar{Z}^B$$

$\{ \frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \}$, $1 \leq k \leq n$, est la base de l'espace tangent complexifié, en $z \in M$, qui est duale à $\{ dz^k, d\bar{z}^k \}$, $1 \leq k \leq n$.

Si $z^k = x^k + iy^k$, $1 \leq k \leq n$, alors, en $z \in M$ on a

$$\begin{aligned} dz^k &= dx^k + i dy^k ; \\ d\bar{z}^k &= dx^k - i dy^k ; \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^k} &= \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^k} - i \frac{\partial}{\partial y^k} \} ; \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} &= \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^k} + i \frac{\partial}{\partial y^k} \} ; \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial z^k} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \\ \frac{\partial}{\partial y^k} &= i \left(\frac{\partial}{\partial z^k} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \right), \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

2 - VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES.

1 - STRUCTURE HERMITIENNE, STRUCTURE KÄHLERIENNE.

Soit M une variété analytique complexe connexe. Soit $T(M)$ le fibré holomorphe tangent de M. Nous désignerons par $\overline{T(M)}$ son conjugué. Le fibré dual de $T(M)$ (respectivement de $\overline{T(M)}$) sera noté $T(M)^*$ (respectivement $\overline{T(M)^*}$).

Soit $\{z_j^k\}$, $1 \leq k \leq n$, $j \in \mathcal{J}$ (=ensemble d'indices), un recouvrement ouvert de M par des systèmes de coordonnées holomorphes.

(1.2.1) Définition : Une structure hermitienne sur une variété analytique complexe M avec des coordonnées locales holomorphes $\{z_j^k\}$, est donnée par :

$$ds^2 = \sum_{\alpha\,\beta}^{n} g_{j\,\alpha\bar{\beta}}(z)\, dz_j^{\alpha} \otimes d\bar{z}_j^{\beta} ,$$

où $g_{j\alpha\bar{\beta}}(z)$ est une section C^∞ de $T(M)^* \otimes (\overline{T(M)})^*$ telle que :

(1) $g_{j\alpha\bar{\beta}}(z) = g_{j\beta\bar{\alpha}}(z)$

(2) $\sum_{\alpha\ \beta}^{n} g_{j\alpha\bar{\beta}}(z)\, \zeta^{\alpha}\, \zeta^{\bar{\beta}} \geq 0$, l'égalité ayant lieu si et seulement si

$\zeta = 0$ (définie positive).

Introduisons maintenant sur la variété analytique complexe connexe M de dimension complexe n, une métrique hermitienne

$$ds^2 = 2 \sum g_{j\alpha\bar{\beta}}(z)\, dz^{\alpha} \otimes d\bar{z}^{\beta}$$

On sait (voir KODAIRA-MORROW[11]) qu'à la métrique ds^2 est associée une forme alternée ω de type (1,1) et de rang 2n. En termes de coordonées locales holomorphes

$$\omega = i \sum g_{j\alpha\bar{\beta}}(z)\, dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}$$

et

(1.2.2) $\omega^n = 2^n\, n\, !\, G\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^{2n}$,

où $G = \det(g_{j\alpha\bar{\beta}})$.

Nous désignerons par $(g_j^{\bar{\alpha}\beta}) = (g_{j\alpha\bar{\beta}})^{-1}$, c'est-à-dire,

$$\sum_{\beta} g_j^{\bar{\alpha}\beta}\, g_{j\beta\bar{\gamma}} = \delta_{\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} \quad \text{et} \quad \sum_{\beta} g_{j\,\alpha\bar{\beta}}\, g_j^{\bar{\beta}\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$$

(1.2.3) Définition : La métrique hermitienne $2 \sum g_{j\alpha\bar{\beta}}(z)\, dz^{\alpha} \otimes d\bar{z}^{\beta}$ est dite kählérienne si

$$d\omega = 0$$

M est appelée kählérienne s'il est possible de définir sur M une métrique kählérienne.

2 - NORMES ET FORMES DUALES.

Soient φ et $\psi \in \mathcal{A}_{pq}(M)$. En $z \in M$, on a, d'après (1.1.2) et (1.1.3) :

$$\varphi(z) = \sum \varphi_{A\bar{B}}\ dZ^{A} \wedge d\bar{Z}^{B},$$

$$\psi(z) = \sum \psi_{A\bar{B}}\ dZ^{A} \wedge d\bar{Z}^{B},$$

où $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ et $\bar{B} = (\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_q)$.

Alors, on définit

$$(1.2.4) \qquad (\varphi,\psi)(z) = \sum g^{\bar{\lambda}_1 \alpha_1} \ldots g^{\bar{\beta}_1 \mu_1} \ldots g^{\bar{\beta}_q \mu_q}\, \varphi_{A\bar{B}}\ \overline{\psi_{\lambda_1,\ldots,\bar{\mu}_q}}$$

Si (1.2.4) est intégrable sur M , alors :

(1.2.5) Définition : le produit scalaire de deux formes $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_{pq}(M)$ est :

$$(\varphi,\psi) = \int_M (\varphi,\psi)(z)\, \frac{\omega^n}{n!} = \int_M (\varphi,\psi)(z)\, 2^n\, G\, dx^1 \ldots dx^{2n},$$

où $\frac{\omega^n}{n!}$ a été défini précédemment (1.2.2).

Le produit scalaire ainsi défini, satisfait aux propriétés classiques suivantes (voir KODAIRA-MORROW[11]).

(1) $(\varphi,\psi) = \overline{(\psi,\varphi)}$

(2) $(a\psi + b\psi', \varphi) = a(\psi,\varphi) + b(\psi',\varphi)$

(3) $(\psi,\psi) \geq 0$

(4) $(\psi,\psi) = 0$ si et seulement si $\psi = 0$

On définit la norme $\| \psi \| = \sqrt{(\psi,\psi)}$. L'isomorphisme de dualité,

$* : \mathcal{A}_{p,q}(M) \longrightarrow \mathcal{A}_{n-q,\, n-p}(M)$, est défini par

$$(\psi,\psi)(z)\,\frac{\omega^n}{n!} = \psi(z) \wedge * \overline{\psi(z)} , \quad z \in M$$

et vérifie :

(1) $\overline{*\psi} = \overline{*\psi}$

(2) $* * \psi = (-1)^{p+q} \psi$, $\forall \psi \in \mathcal{A}_{p,q}(M)$

On vérifie également que $\forall \psi, \psi \in \mathcal{A}_{p,q}(M)$ on a

$$\overline{\psi} \wedge * \psi = \psi \wedge * \overline{\psi}$$

Posons $A_p = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$, $1 \leq \alpha_i \leq n$;

$$A_{n-p} = (\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n) , \quad \alpha_{p+1} < \ldots < \alpha_n, \; 1 \leq \alpha_i \leq n ,$$

où n est la dimension de M et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n)$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$.

De même pour $B_q = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$, $B_{n-q} = (\beta_{q+1}, \ldots, \beta_n)$.

Avec la notation ainsi introduite, d'après (1.1.2)et (1.1.3), une (p,q)-forme s'exprime localement par :

$$\psi = \sum_{A_q} \sum_{B_q} \psi_{A_p \overline{B}_q} \, dZ^{A_p} \wedge d\overline{Z}^{B_q}$$

Notons

$$\psi^{\overline{A}_p \, B_q} = \sum_{\lambda,\mu} g^{\overline{\alpha}_1 \, \lambda_1} \ldots g^{\mu_q \, \beta_q} \psi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \, \overline{\mu}_1 \ldots \overline{r}_q}$$

Alors

$$\overline{\psi} = \sum_{A_p} \sum_{B_q} \overline{\psi_{A_p \, \overline{B}_q}} \, d\overline{Z}^{A_p} \wedge dZ^{B_q}$$

$$= \sum \sum (-1)^{pq} \, \overline{\psi_{A_p \, \overline{B}_q}} \, dZ^{B_q} \wedge d\overline{Z}^{A_p}$$

Ainsi

$$(\overline{\psi})_{B_q \overline{A}_p} = (-1)^{pq} \overline{\psi_{A_p \overline{B}_q}}$$

L'équation (1.2.4) peut alors s'écrire :

$$(1.2.6) \quad (\varphi,\psi)(z) = \sum_{A_p, B_q} \varphi_{A_p \overline{B}_q} \overline{\psi^{\overline{A}_p B_q}}$$

$$= (-1)^{pq} \sum_{A_p, B_q} \psi_{A_p \overline{B}_q} \overline{\psi}^{\overline{B}_q A_p}$$

(1.2.7) Définition $\vartheta \psi = - * \partial (* \psi)$; $\overline{\vartheta} \psi = * \overline{\partial}(* \psi)$ et $\delta\psi = - * d(* \psi)$

Il est aisé de vérifier (voir proposition 1.20 de KOHN [12]) que l'on a :

(1) Si $\varphi \in \mathcal{A}_{pq}(M)$, $\forall\, \psi \in \mathcal{A}_{p,q-1}(M)$ et si φ, soit ψ a un support compact :

$$(1.2.8) \quad (\overline{\partial}\psi, \varphi) = (\psi, \vartheta\varphi)$$

(2) Si $\varphi \in \mathcal{A}_{pq}(M)$, $\forall\, \psi \in \mathcal{A}_{p-1,q}(M)$ et si φ, soit ψ a un support compact :

$$(1.2.9) \quad (\partial\psi, \varphi) = (\psi, \overline{\vartheta}\varphi)$$

(3) Si $\varphi \in \mathcal{A}_{p}(M)$, $\forall\, \psi \in \mathcal{A}_{p-1}(M)$ et si φ, soit ψ a un support compact :

$$(1.2.10) \quad (d\psi, \varphi) = (\psi, \delta\varphi) ;$$

c'est-à-dire que ϑ, $\overline{\vartheta}$ et δ sont les adjoints formels respectifs de $\overline{\partial}$, ∂ et d.
Nous avons également (voir KODAIRA [11]) le propriétés suivantes :

$$\vartheta : \mathcal{A}_{pq}(M) \longrightarrow \mathcal{A}_{p,q-1}(M)$$

$$\overline{\vartheta} : \mathcal{A}_{pq}(M) \longrightarrow \mathcal{A}_{p-1,q}(M)$$

$$\delta : \mathcal{A}_{p}(M) \longrightarrow \mathcal{A}_{p-1}(M) ;$$

$$\delta^2 = 0 \; ; \; \vartheta^2 = 0 \; ; \; \overline{\vartheta}^2 = 0.$$

Si en coordonnées locales holomorphes, une forme $\psi \in \mathcal{A}_{p,q+1}(M)$, a pour expression locale, d'après (1.1.2) et (1.1.3)

$$\psi = \sum_{A_p, B_{q+1}} \psi_{A_p, \bar{B}_{q+1}} \, dZ^{A_p} \wedge d\bar{Z}^{B_{q+1}}$$

alors, nous avons dans KODAIRA-MORROW [(11); proposition 2.3 ; p.97)] la proposition suivante :

(1.2.11) Proposition : Pour $\psi \in \mathcal{A}_{p,q+1}(M)$

$$(\vartheta \psi)_{\bar{A}_p \, \beta_1 \ldots \beta_q} = (-1)^{p+1} \sum_{\beta=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_\beta} \frac{\partial \log G}{\partial z_\beta} \right) \psi_{\bar{A}_p \, \beta \, \beta_1 \ldots \beta_q}$$

En "abaissant les indices", il vient :

(1.2.12) $$(\vartheta \psi)_{A_p \, \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q} = (-1)^{p+1} \sum_{\beta, \mu} g^{\bar{\mu}\beta} \, \partial_\beta \, \psi_{A_p \, \bar{\mu} \, \beta_1 \ldots \beta_q} + \text{termes de}$$

degré zéro.

$\square = \bar{\partial} \vartheta + \vartheta \bar{\partial}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami complexe et applique $\mathcal{A}_{pq}(M)$ dans $\mathcal{A}_{pq}(M)$.

C'est un opérateur aux dérivées partielles du second ordre ; plus précisément, nous avons la (proposition 2.5 ; (11) ; p. 99)

(1.2.13) $$\square = - \sum^{g^{\bar{r}\beta}} \frac{\partial^2}{\partial z_\beta \, \partial \bar{z}_\mu} + \text{termes de degré inférieur.}$$

Soit $\theta^1, \ldots \theta^n$ une base orthonormale de $\mathcal{A}_{1,o}(M)$ obtenue de $dz^1, \ldots, dz^n$ par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Notons $Z_1, \ldots, Z_n$ la base duale de $\theta^1, \ldots, \theta^n$. Alors, on sait que

(1.2.14) $$\theta^i = \sum_k f^i_k \, dz^k \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \, , \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

et

$$Z_i = \sum_k \lambda^k_i \frac{\partial}{\partial z_k} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \, , \quad 1 \leqslant k \leqslant n \, ,$$

où les f^i_k , λ^k_i sont des fonctions C^∞ sur M.

Dans cette base orthonormale $\theta^1, \ldots \theta^n$, pour tout $\varphi \in \mathcal{A}_{pq}(M)$, (1.1.4) devient, d'après (1.1.2) et (1.1.3) :

$$(1.2.16) \qquad \bar{\partial}\varphi = (-1)^p \sum \in^{B_{q+1}}_{kB_q} \bar{Z}_k (\varphi_{A_p \bar{B}_q}) \theta^{A_p} \wedge \bar{\theta}^{B_{q+1}} + \text{termes}$$

d'ordre zéro,

où $B_q = (\beta_1, \ldots \beta_q)$ avec $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_q$ et B_{q+1} est le (q+1)-uple ordonné croissant $(k, \beta_1, \ldots \beta_q) = \{ k, B_q \}$.

De même on a :

$$(1.2.17) \qquad \partial\varphi = (-1)^{p+1} \sum \in^{B_q}_{k\, B_{q-1}} Z_k (\varphi_{A_p \bar{B}_q}) \theta^{A_p} \wedge \bar{\theta}^{B_{q-1}} + \text{termes}$$

d'ordre zéro.

et $g^{\bar{\mu}\beta} = \delta^{\bar{\mu}\beta}$

Il résulte de (1.2.16) et (1.2.17) que pour tout $\varphi \in \mathcal{A}_{pq}(M)$ on a

$$(1.2.18) \qquad \square\varphi = - \sum Z_k \bar{Z}_k (\varphi_{A_p \bar{B}_q}) \theta^{A_p} \wedge \bar{\theta}^{B_q} + \text{termes d'ordre inférieur}$$

(1.2.19) Remarque : La variété M étant kählérienne, il suffit de choisir en chaque point $z \in M$, un système de coordonnées normales holomorphes $\{z' i\}$, $1 \leq i \leq n$. Pour ce choix de coordonnées, on a $g^{\bar{\mu}\beta} = \delta^{\bar{\mu}\beta}$, d'où la partie principale $- \sum g^{\bar{\mu}\beta} \dfrac{\partial^2}{\partial z\beta \; \partial \bar{z}\mu}$ se traduit par :

$$- \sum_{\beta,\mu} \delta^{\bar{r}\beta} \frac{\partial^2}{\partial z\beta \; \partial \bar{z}\mu} = - \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z\mu \; \partial \bar{z}\mu} .$$

3 - FORMES SUR LES FIBRES HOLOMORPHES EN DROITES COMPLEXES.

Soit M une variété kählérienne de dimension complexe n. Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M. Soit $\mathcal{U} = \{ U_j \}$, $j \in \mathcal{J}$ (= ensemble d'indices) un recouvrement de M suffisamment fin par des ouverts U_j au-dessus desquels le fibré F est trivial.

Alors, le fibré holomorphe en droites complexes, F , est déterminé par le système $\{ f_{jk} \}$ de fonctions holomorphes définies dans $U_j \cap U_k$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^*$,

$$f_{jk} : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

et satisfaisant dans $U_j \cap U_k \cap U_\ell$

$$f_{jk} \; f_{k\ell} \; f_{\ell j} = 1$$

Introduisons, pour tout couple de vecteurs v et η appartenant à la fibre $\mathbb{C}_z$ ($z \in M$) de F , un produit scalaire hermitien $a(v,\eta)$ qui dépend différentiablement de z.
Si, sur U_j, ζ_j et η_j sont les composantes de v et η (dans $\mathbb{C}_z$) respectivement, on a :

$$a(v, \eta) = a_j(z) \quad \zeta_j \, \eta_j \; ;$$

$$a(v, v) = a_j(z) \quad |\zeta_j|^2 \quad ;$$

avec $a_j(z) > 0$ et de classe C^∞ sur U_j.

Alors, $a_j(z) \quad |\zeta_j|^2 = a_k(z) \quad |\zeta_k|^2$ implique

$$\frac{a_k}{a_j} = |f_{jk}|^2 \quad \text{sur } U_j \cap U_k$$

Soit $\mathcal{A}_{pq}(F)$ le faisceau des germes des (p,q)-formes C^∞ sur M , à coefficients dans F.
Alors, l'ensemble $\Gamma(M, \mathcal{A}_{pq}(F))$ des sections C^∞ de $\mathcal{A}_{pq}(F)$, c'est-à-dire les formes C^∞ sur M , de type (pq), et à coefficients dans F, sera noté $C^\infty_{pq}(M,F)$.
Une forme ϕ à coefficients dans F est, par définition, un système $\{\phi_j\}$, $j \in \mathcal{J}$, de formes différentielles ϕ_j, définies respectivement dans U_j, telles que :

$$\phi_j = f_{jk} \, \phi_k \text{ , dans } \quad U_j \cap U_k.$$

Pour une forme $\phi = \{ \phi_j \}$ à coefficients dans F ,

$$(1.2.20)\qquad \begin{aligned} \overline{\partial}\varphi &= \{ (\overline{\partial}\varphi)_j \} \\ \vartheta_a\varphi &= \{ (\vartheta_a\varphi)_j \} , \end{aligned}$$

sont définis respectivement par :

$$(1.2.21)\qquad \begin{aligned} (\overline{\partial}\varphi)_j &= \overline{\partial}\varphi_j \\ (\vartheta_a\varphi)_j &= - * \frac{1}{a_j} \partial(a_j * \varphi_j) \end{aligned}$$

où a est la métrique sur la fibre de F .

Si $C^\infty(M,F)$ désigne l'espace des formes C^∞ sur M à coefficients dans F , alors on a :

$$(1.2.22)\qquad C^\infty(M,F) = \sum \oplus\ C^\infty_{(pq)}(M,F)$$

Soient $\varphi, \psi \in C^\infty_{(p,q)}(M,F)$, $\varphi(z) = \{\varphi_j(z)\}$, $\psi(z) = \{\psi_j(z)\}$.
Alors on définit une fonction C^∞ $(\varphi,\psi)(z)$ par :

$$(1.2.23)\qquad (\varphi,\psi)(z) = a_j(\varphi_j, \psi_j)(z) ,$$

où $(\varphi_j, \psi_j)(z)$ a été défini au (1.2.4)
Si la fonction C^∞ , $(\varphi,\psi)(z)$ est intégrable sur M , on définit

$$(1.2.24)\qquad (\varphi,\psi) = \int_M (\varphi,\psi)(z) \frac{\omega^n}{n!} \qquad (\dim_{\mathbb{C}} M = n)$$

$$= \int_M a_j(z)\ \varphi_j(z) \wedge * \overline{\psi_j}(z)$$

L'adjoint formel de $\overline{\partial}$ (par rapport à la métrique a sur la fibre de F) est l'opérateur différentiel.

$$(1.2.25)\qquad \vartheta_a : C^\infty_{(p,q)}(M,F) \longrightarrow C^\infty_{p,q-1}(M,F)$$

Cette définition est cohérente (voir KODAIRA-MORROW[11]) et on a

$$\vartheta_a^2 = 0$$

Il s'en suit que (par rapport à la métrique a sur la fibre de F), on a l'opérateur de Laplace-Beltrami complexe

$$\Box_a : C^\infty_{(pq)}(M,F) \longrightarrow C^\infty_{(pq)}(M,F)$$

défini par

$$(1.2.26)\quad \Box_a \varphi = \bar\partial \vartheta_a \varphi + \vartheta_a \bar\partial \varphi\,, \quad \forall \varphi \in C^\infty_{pq}(M,F)$$

Soient $\varphi, \psi \in C^\infty(M,F)$ (1.2.22). Supposons que $\mathrm{supp}(\psi) \cap \mathrm{supp}(\psi)$ est compact. Alors, les produits scalaires

$$(\bar\partial\varphi, \psi),\quad (\varphi, \vartheta_a \psi)\,,\quad (\varphi, \Box_a \psi)\,,\quad (\Box_a \varphi, \psi)$$

sont bien définis pourvu que φ et ψ possèdent des degrés convenables.
De la forme de Stokes découlent les identités suivantes :

$$(1.2.27)\quad \begin{aligned} &(1)\quad (\bar\partial\varphi, \psi) \qquad (\varphi, \vartheta_a \psi) \\ &(2)\quad (\varphi, \Box_a \psi) = (\Box_a \varphi, \psi) = (\bar\partial\varphi, \bar\partial\psi) + (\vartheta_a \varphi, \vartheta_a \psi) \end{aligned}$$

En particulier, pour $\varphi, \psi \in C^\infty_o(M,F)$ (=ensemble des formes C^∞ à coefficients dans F et à support compact), les identités ci-dessus sont satisfaites.
On vérifie que l'on a (voir (11); p.102)

$$(1.2.28)\quad \Box_a = \Box + \text{termes d'ordre} \leq 1.$$

Ainsi, on a le (11 ; p.102):

$$(1.2.29)\ \underline{\text{Théorème}}\ :\ \Box_a = -\sum g^{\bar\beta\alpha} \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha\, \partial \bar z_\beta} + \text{termes d'ordre inférieur.}$$

On en déduit que $\Box_a$ est un opérateur du second ordre fortement elliptique.

4 - DERIVATION COVARIANTE SUR LES VARIETES KÄHLERIENNES.

1) Soit M une variété kählérienne munie de la métrique

$$g = 2 \sum g_{\alpha\bar{\beta}} \, dz\alpha \otimes d\bar{z}\beta$$

Soit ∇ la connexion riemannienne associée à g. Nous noterons également pour ∇ la dérivation covariante de la connexion ∇ .
Dans toute la suite (nous le répèterons plus) le symbole ∇ désignera la dérivation covariante de la métrique kählérienne de la variété.
Soit $\{z_j^k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, un système de coordonnées holomorphes sur M . Posons

$$\frac{\partial}{\partial zk} = \partial_k \; ; \; \frac{\partial}{\partial \bar{z}k} = \bar{\partial}_k .$$

Si ζ , de composantes ζ_j^α dans $\{z_j^k\}$ est une section du fibré tangent complexifié $T(M)$ de M , on a

$$(1.2.30) \qquad \nabla_\lambda \; \zeta_j^\alpha = \frac{\partial \zeta_j^\alpha}{\partial z_i^\lambda} + \sum_\beta \; \Gamma_{j\alpha\beta}^\alpha \; \zeta_j^\beta \quad ,$$

où les $\Gamma_{j\lambda\beta}^\alpha$ sont les symboles de Christoffel.

$$(1.2.31) \qquad \nabla_{\bar{\lambda}} \zeta_j^\alpha = \bar{\partial}_\lambda \; \zeta_j^\alpha$$

De même on a les résultats classiques suivants (voir (11 ; p.109)).

$$(1.2.32) \qquad \nabla_\lambda \; g_{\alpha\bar{\beta}} = 0 \; ; \; \nabla_\lambda \; g^{\alpha\bar{\beta}} = 0$$

On a également

$$(1.2.33) \qquad \left[\nabla_\lambda \; , \; \nabla_{\bar{\nu}} \right] = \nabla_\lambda \; \nabla_{\bar{\nu}} - \nabla_{\bar{\nu}} \; \nabla_\lambda$$

et (11 ; p.117)

$$(1.2.34) \qquad \left[\nabla_\lambda \, , \, \nabla_{\bar{\nu}} \right] \zeta^\alpha = - \sum_{\beta=1}^{n} \; R_{\beta\bar{\nu}\lambda}^\alpha \; \zeta^\beta$$

où $R_{\beta\bar{\nu}\lambda}^\alpha = \bar{\partial}_\nu \; \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha$

désignent les composantes du tenseur de courbure de la métrique g. On en déduit les composantes du tenseur de courbure de Ricci (11 ; p.118).

$$(1.2.35)\qquad R_{\overline{\nu}\lambda} = \sum_{\alpha,\beta} g^{\overline{\alpha}\beta} R_{\overline{\alpha}\beta\overline{\nu}\lambda} = \sum_{\beta=1}^{n} R^{\beta}_{\beta\overline{\nu}\lambda}$$

$$= \overline{\partial}_{\nu} \sum_{\beta} \Gamma^{\beta}_{\lambda\beta}$$

Si $\varphi \in \mathcal{A}_{pq}(M)$ (1.1), alors, en coordonnées locales holomorphes on a (11; p.110)

$$(1.2.36)\qquad \overline{\partial}\varphi = \sum \nabla_{\overline{\alpha}} \varphi_{A\overline{B}}\, d\overline{z}^{\alpha} \wedge dZ^{A} \wedge d\overline{Z}^{B}$$

où $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ et $\overline{B} = (\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_q)$;

$$(1.2.37)\qquad (\partial\varphi)_{A\,\overline{\beta}_1\ldots\overline{\beta}_{q-1}} = (-1)^{p+1} \sum_{\beta,\gamma} g^{\overline{\beta}\gamma} \nabla_{\gamma} \varphi_{A\,\overline{\beta}\,\overline{\beta}_1\ldots\overline{\beta}_{q-1}}$$

Enfin nous avons dans KODAIRA et MORROW (11 ; Théorème 6.1 ; page 119)

(1.2.38) Théorème : Pour toute (p,q)-forme $\varphi \in \mathcal{A}_{pq}(M)$,

$$\varphi = \sum_{\substack{\alpha_1<\ldots<\alpha_p \\ \beta_1<\ldots<\beta_q}} \varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,\overline{\beta}_1\ldots\overline{\beta}_q}\, dZ^{A} \wedge d\overline{Z}^{B}$$

on a :

$$(\Box\varphi)_{\alpha_1\ldots\overline{\beta}_q} = -\sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\overline{\beta}} \nabla_{\alpha} \nabla_{\overline{\beta}} \varphi_{\alpha_1\ldots\overline{\beta}_q}$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \sum_{\tau,\sigma} R^{\tau}_{\alpha_i\,\overline{\beta}_k}\, \varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\,\sigma\,\alpha_{i+1}\ldots\overline{\beta}_{k-1}\,\overline{\sigma}\,\overline{\beta}_{k+1}\ldots\overline{\beta}_q}$$

$$- \sum_{k=1}^{q} \sum_{\tau} R^{\overline{\tau}}_{\overline{\beta}_k}\, \varphi_{\alpha_1\ldots\overline{\beta}_{k-1}\,\overline{\tau}\,\overline{\beta}_{k+1}\ldots\overline{\beta}_q},$$

où $R^{\overline{\tau}}_{\beta} = \sum g^{\overline{\tau}\lambda} R_{\overline{\beta}\lambda}$

2) Supposons défini, maintenant, sur la variété kählérienne M , un fibré holomorphe en droites complexes , F , au moyen des 1-cocycle $\{ f_{jk} \}$.
Nous allons déduire un théorème analogue du théorème 1.2.38 précédent pour l'opérateur $\square_a$ (1.2.26).
On sait que si $\{U_j\}$ est un recouvrement de M par des domaines de coordonnées holomorphes au-dessus desquels le fibré F est trivial, alors, une (p,q)-forme $\varphi \in C^{\infty}_{(p,q)}(M,F)$ est donnée sur chaque U_j par une famille de (p,q)-formes $\{\varphi_j\}$ telles que

$$\varphi_j = f_{jk}\, \varphi_k \qquad \text{sur} \quad U_j \cap U_k \tag{1.2.39}$$

Il est clair qu'il existe un système $\{a_j\}$ de fonctions de classe C^{∞} à valeurs définies positives, respectivement dans U_j et satisfaisant à la condition

$$\frac{a_k}{a_j} = |f_{jk}|^2 \qquad \text{dans} \quad U_j \cap U_k \tag{1.2.40}$$

Rappelons que

$$(\partial\varphi)_j = \bar{\partial}\varphi_j$$

$$(\vartheta_a \varphi)_j = \vartheta \varphi_j - * \Big(\sum \frac{1}{a_j}\, \partial_\alpha a_j\, dz^\alpha \wedge * \varphi_j \Big) \tag{1.2.41}$$

$$= - * (\partial * \varphi_j) - * \Big(\sum a_j^{-1}\, \partial_\alpha a_j\, dz^\alpha \wedge * \varphi_j \Big)$$

Il résulte de (1.2.37) et (1.2.41) le théorème suivant

(11 ; p.122) :

(1.2.42) Théorème

$$(\vartheta_a \varphi)_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_{q-1}} = (-1)^{p+1} \sum_{\alpha,\beta} g^{\bar{\beta}\alpha} (\nabla_\alpha + \partial_\alpha \log a_j)\, \varphi_{j\, \alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}\, \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_{q-1}}$$

Soit maintenant $\varphi = \{ \varphi_j \} \in C^{\infty}_{pq}(M,F)$. Alors

$$\varphi_{j\, A\bar{B}} = f_{jk}\, \varphi_{k\, A\bar{B}}$$

d'après (1.1.2) et (1.1.3).

D'autre part, si f est une fonction de C^{∞} , on a :

$$\nabla_{\bar{\alpha}} (f.\psi) = (\bar{\partial}_{\alpha} f)\psi + f \cdot \nabla_{\bar{\alpha}} \psi$$

$$\nabla_{\alpha} (f \psi) = (\partial_{\alpha} f)\psi + f \ \nabla_{\alpha}\psi$$

Mais dans notre cas, on a $\bar{\partial} f_{jk} = 0$,par suite, il vient :

$$\nabla_{\bar{\alpha}} \psi_{j\, A\bar{B}} = f_{jk} \ \nabla_{\alpha} \psi_{k\, A\bar{B}}$$

Ainsi on définit

$$\nabla_{\bar{\alpha}} \psi = \{ \nabla_{\bar{\alpha}} \psi_{j} \}$$

Cependant

$$\nabla_{\alpha} \psi_{j\, A\bar{B}} = f_{jk} \nabla_{\alpha} \psi_{k\, A\bar{B}} + \partial_{\alpha} f_{jk} \psi_{k\, A\bar{B}}$$

Il en résulte qu'on peut définir une différentiation covariante, notée $\nabla^{(a)}$ différente de la dérivation covariante ∇ et qui dépend de a_j. On sait que

$$\frac{a_k}{a_j} = |f_{jk}|^2 = f_{jk} \ \bar{f}_{jk} \quad ,$$

On en déduit que

$$a_j \psi_{j\, A\bar{B}} = \frac{1}{f_{jk}} \ a_k \psi_{k\, A\bar{B}}$$

Mais comme on a

$$\nabla_{\alpha} \left(\frac{1}{\bar{f}_{jk}}\right) = \partial_{\alpha} \left(\frac{1}{\bar{f}_{jk}}\right) = 0 \ ,$$

il s'en suit que

$$\nabla_{\alpha}(a_j \psi_{j\, A\bar{B}}) = \left(\frac{1}{\bar{f}_{jk}}\right) \nabla_{\alpha} (a_k \psi_{k\, A\bar{B}})$$

Ainsi

$$(1.2.43)\qquad \frac{1}{a_j}\,\nabla_\alpha\,(a_j\,\varphi_{j\,A\overline{B}}) = f_{jk}\,\Big(\frac{1}{a_k}\,\nabla_\alpha\,(a_k\,\varphi_{k\,A\overline{B}})\Big)$$

Il découle de (1.2.43) que l'on peut définir $\nabla^{(a)}$ par :

$$(1.2.44)\qquad \nabla^{(a)}_\alpha \varphi = \Big\{\frac{1}{a_j}\,\nabla_\alpha\,(a_j\varphi_j)\Big\}$$

$$= \{(\nabla_\alpha + \partial_\alpha \log a_j)(\varphi_j)\}$$

Enfin, nous avons le théorème suivant (11 ; théorème 6.2, p.124) :

(1.2.45) Théorème :

$$\Box_a\,\varphi_{j\,A_p\overline{B}_q} = -\sum g^{\overline{\beta}\alpha}\,\nabla^{(a)}_\alpha\nabla_{\overline{\beta}}\,\varphi_{j\,A_p\overline{B}_q}$$

$$+\sum_{k=1}^{q}\ \sum_{\tau}\,(X^{\overline{\tau}}_{\overline{\beta}_k} - R^{\overline{\tau}}_{\overline{\beta}_k})\,\varphi_{j\,A_p\,\overline{\beta}_1,\ldots(\overline{\tau})_k\ldots\overline{\beta}_q}$$

$$+\sum_{i}\sum_{k}\sum_{\tau,\overline{\sigma}} R^{\tau}_{\alpha_i\,\overline{\beta}_k^{\,\overline{\sigma}}}\,\varphi_{j\,\alpha_1\ldots(\tau)_i\ldots\alpha_p\,\overline{\beta}_1\ldots(\overline{\sigma})_k\ldots\,\overline{\beta}_q},$$

où $X^{\overline{\tau}}_{\overline{\beta}} = -\nabla_{\overline{\beta}}\,\zeta^{\overline{\tau}}$ et $\zeta^{\overline{\tau}} = \sum_\alpha g^{\overline{\tau}\alpha}\,\partial\alpha\,\log a_j$

Démonstration : D'après le théorème (1.2.42), on a :

$$(\delta_a\,\varphi)_{A_p\,\overline{B}_{q-1}} = (\delta\varphi)_{A_p\,\overline{B}_{q-1}} - (-1)^p \sum \zeta^{\overline{\beta}}\,\varphi_{A_p\,\overline{\beta}\,\overline{B}_{q-1}}$$

Notons par $(\zeta\,\varphi)_{A_p\overline{B}_{q-1}}$ le dernier terme. Il vient alors

$$(\Box_a \psi)_{A_p \overline{B}_q} = \left(\left[\overline{\partial}\, \nabla_a + \nabla_a\, \overline{\partial} \right] \psi \right)_{A_p \overline{B}_q}$$

$$= (\Box \psi)_{A_p \overline{B}_q} + \left[(\overline{\partial}\zeta + \zeta\, \overline{\partial})\psi \right]_{A_p \overline{B}_q}$$

De (1.2.36), découle par calcul

$$\left[\overline{\partial}\, (\zeta\psi) \right]_{A_p \overline{B}_q} = (-1)^p \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \nabla_{\overline{\beta}_k} (\zeta\psi)_{A_p \overline{\beta}_1 \ldots \hat{\overline{\beta}}_k \ldots \overline{\beta}_q}$$

$$= - \sum (-1)^{k-1} \nabla_{\overline{\beta}_k} \sum_{\beta} \zeta^{\overline{\beta}} \psi_{A_p \overline{\beta}\ \overline{\beta}_1 \ldots \hat{\overline{\beta}}_k \ldots \overline{\beta}_q}$$

$$= - \sum_{k=1}^{q} \sum_{\beta} \nabla_{\overline{\beta}_k} (\zeta^{\overline{\beta}} \psi_{A_p \overline{\beta}_1 \ldots (\overline{\beta})_k \ldots \overline{\beta}_q})$$

De même nous avons

$$(\zeta \overline{\partial} \psi)_{A_p \overline{B}_q} = - \sum (\zeta^{\overline{\beta}} \nabla_{\overline{\beta}} - \sum_{k=1}^{q} \zeta^{\overline{\beta}} \nabla_{\overline{\beta}_k}) \psi_{A_p \overline{\beta}_1 \ldots (\overline{\beta})_k \ldots \overline{\beta}_q}$$

Ainsi

(1.2.46)
$$(\Box_a \psi)_{A_p \overline{B}_q} = (\Box \psi)_{A_p \overline{B}_q} - \sum_{\beta} (\zeta^{\overline{\beta}} \nabla_{\overline{\beta}})\, \psi_{A_p \overline{B}_q}$$

$$- \sum_{\beta} \sum_{k=1}^{q} \left(\nabla_{\overline{\beta}_k} \zeta^{\overline{\beta}} \right) \psi_{A_p \ldots (\overline{\beta})_k \ldots \overline{\beta}_q}$$

De même on a

$$- \sum g^{\overline{\beta}\alpha} \nabla_\alpha \nabla_{\overline{\beta}} - \zeta^{\overline{\beta}} \nabla_{\overline{\beta}} = - \sum g^{\overline{\beta}\alpha} (\nabla_\alpha + \partial_\alpha \log a_j) \nabla_{\overline{\beta}}$$

(1.2.47)
$$= - \sum g^{\overline{\beta}\alpha} \nabla_\alpha^{(a)} \nabla_{\overline{\beta}}$$

De (1.2.46) ,(1.2.47) et du théorème (1.2.38) découle le théorème énoncé.

(1.2.48) Remarque

$$\chi_{\lambda\,\bar{\mu}} = \sum g_{\lambda\bar{\tau}}\, \chi^{\bar{\tau}}_{\bar{\mu}} = -\nabla_{\bar{\mu}}\, \partial_\lambda \log a_j$$

$$= + \partial\, \partial_{\bar{\mu}} \log a_j$$

est la courbure de la métrique a sur la fibre de F .

5 - LA PREMIERE CLASSE DE CHERN

Soit Ω le faisceau des fonctions holomorphes sur M et $\hat{e}^{\Omega}$ celui des fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas. On sait que la suite suivante est exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \Omega \longrightarrow e^{\Omega} \longrightarrow 0$$

De la suite exacte correspondante de cohomologie, on déduit l'homomorphisme

$$C : H^1(M,\, e^{\Omega}) \longrightarrow H^2\,(M,\mathbb{Z})$$

$H^1(M,\, e^{\Omega})$ n'est autre que le groupe $\mathcal{F}$ des classes d'isomorphisme des C^{ω}-fibrés en droites complexes.
La classe $C(\sigma) \in H^2\,(M,\mathbb{Z})$ s'appelle la classe de CHERN de F et sera notée $C(F)$.
Du fait que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, on applique $H^2\,(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2\,(M,\mathbb{C})$ et envoie $C(F) \longrightarrow C(F)_{\mathbb{C}}$. D'après le théorème de de RHAM

$$H^2\,(M,\mathbb{C}) = \frac{\Gamma(M,\, d\mathcal{Q}_1)}{d\,\Gamma\,(M,\, \mathcal{Q}_1)}$$

Nous avons alors le lemme suivant :

(1.2.49) Lemme : La classe de cohomologie de de RHAM de $C(F)_{\mathbb{C}}$ est représentée par $\left(\frac{1}{2\pi i}\right) \sum \chi_{\lambda\bar{\nu}}\, dz^{\lambda} \wedge d\bar{z}^{\nu}$

Démonstration :

Soit $F = \{ f_{jk} \}$. Alors $C(F) = \left[\{ C_{ijk} \} \right]$, où

$$C_{ijk} = \frac{1}{2\pi i} \{ \log f_{ij} + \log f_{jk} + \log f_{ki} \}$$

Nous voulons trouver un représentant $\gamma \in \Gamma (M, d \mathcal{Q}_1)$ de $C(F)$. On sait trouver des 1-formes C^∞, σ_j, sur U_j telles que

$$\frac{1}{2\pi i} d \log f_{jk} = \sigma_k - \sigma_j .$$

Alors $\gamma = d\sigma_j = d\sigma_k$. Rappelons que $|f_{jk}|^2 = \frac{a_k}{a_j}$ et que $\chi_{\lambda \bar{\mu}} = -\partial_\lambda \overline{\partial}_\mu \log a_j$.

Ainsi

$$\log f_{jk} + \overline{\log f_{jk}} = \log a_k - \log a_j$$

et

$$d \log f_{jk} = \partial \log f_{jk} = \partial \log a_k - \partial \log a_j$$

Posons

$$\sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \partial \log a_k$$

Alors

$$\gamma = d\sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \overline{\partial} \partial \log a_k = - \frac{1}{2\pi i} \sum \partial_\lambda \overline{\partial}_\mu \log a_k \, dz^\lambda \wedge d\bar{z}^\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum \chi_{\lambda \bar{\mu}} \, dz^\lambda \wedge d\bar{z}^\mu$$

CHAPITRE II

ANALYSE FONCTIONNELLE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS SUR LES VARIÉTÉS.

Ce chapitre consiste en des notations et des rappels de résultats classiques d'analyse fonctionnelle sur les variétés, en particulier le lemme de Rellich et Sobolev (Lemme 2.2.6) et une proposition concernant les opérateurs de différence finie (Proposition 2.4.3).

1 - NOTATIONS

Nous nous contenterons, dans la suite, des notations de KOHN et FOLLAND[14] pour éviter l'emploi de constantes inutiles.

Soit S un ensemble. Si f et g sont des fonctions définies sur S, alors, nous emploierons la notation

(2.1.1) $f \lesssim g$,

soit

(2.1.2) $f = \mathcal{O}(g)$,

pour exprimer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

(2.1.3) $|f(x)| \leq c\ |g(x)|$, $\forall x \in S$

Si f et g dépendent également d'autres paramètres, pour indiquer que la constante C est indépendante de x (mais pas nécessairement des autres paramètres) nous dirons que "$f \lesssim g$ uniformément , $\forall x \in S$".
La notation

(2.1.4) $\qquad f \sim g$

signifie que $f \lesssim g$ et $g \lesssim f$.
Si $x^1,..,x^{2n}$ est un système de coordonnées locales, nous poserons

(2.1.5) $\qquad D^k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^k}$

D^α , où α est un multi-indice , désignera alors les produits des D^k.

2 - PROPRIETES ELEMENTAIRES D'ANALYSE

(2.1.6) Soit D et D' deux opérateurs différentiels d'ordre m et n respectivement, alors, $[D,D'] = DD' - D'D$, est un opérateur différentiel d'ordre $m+n-1$.

(2.1.7) $\forall \varepsilon > 0$, il existe $K > 0$ telle que $\forall$ α, β réels positifs, on a :

$$\alpha\beta \leq \varepsilon \alpha^2 + K\beta^2$$

(En fait, on peut prendre $K = \frac{1}{4\varepsilon}$, puisque

$$\varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\beta^2 - \alpha\beta = (\sqrt{\varepsilon}\,\alpha - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\beta)^2 \geq 0).$$

Nous allons maintenant compléter (2.1.7) par un rappel d'un lemme d'interpolation, utile pour l'établissement de l'inégalité de Garding dans le chapitre suivant (Chapitre III).

Soit U un domaine d'un espace complexe de dimension n, de frontière bU et de fermeture $\overline{U}$. Introduisons certains espaces de fonctions qui sont des espaces de Hilbert.

Pour toute fonction u à valeurs complexes, continûment dérivable jusqu'à l'ordre $m \geq 0$, nous définissons la norme de Sobolev

$$\| u \|_m^2 = \sum_{k=o}^{m} \int | \frac{\partial u}{\partial x^k} |^2 \, dx$$

et le produit scalaire associé

$$(u,v)_m = \sum_{k=o}^{m} \int \frac{\partial u}{\partial x^k} \overline{\frac{\partial v}{\partial x^k}} \cdot dx ,$$

les intégrations se faisant sur U .
Le complété de l'ensemble de telles fonctions u, muni de la norme $\| \quad \|_m$ sera désigné par $W^m(U)$.
Nous dirons qu'un fonction u possède des dérivées fortes jusqu'à l'ordre m dans le domaine U si, pour tout sous-domaine K compact de U, cette fonction appartient à $W^m(K)$.
Nous avons dans NIRENBERG[17] le lemme d'interpolation suivant :

(2.1.8) Lemme : Soit U un domaine de classe C^2 d'un espace complexe de dimension complexe n. Si $u \in W^m(U)$, alors, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une constante $C(\varepsilon,m)$ qui dépend uniquement de ε et m, telle que

$$(2.1.9) \qquad \| u \|_{m-1}^2 \leq \varepsilon \| u \|_m^2 + C(\varepsilon, m) \| u \|_o^2$$

2 - NORMES DE SOBOLEV SUR LES VARIÉTÉS.

Soit M' une variété riemannienne de dimension N sans bord . Soit $\mathcal{U} = \{U_j\}$, $j \in \mathcal{J}$ (=ensemble d'indices), un recouvrement localement fini de M' par des cartes $\{U_j, \psi_j\}$, $\psi_j \; U_j \longrightarrow \mathbb{R}^N$, et soit $\{\ell_j\}$ une partition différentiable de l'unité subordonnée à $\mathcal{U} = \{U_j\}$.

Si $K \subset M'$ est compact, soit $\mathcal{A}_{o(p)}(K)$ l'espace des formes différentielles de degré p à support dans K. Si M' est complexe, on a $\mathcal{A}_{o(p)}(K) = \sum_{k+\ell=p} \oplus \mathcal{A}_{o(k,\ell)}(K)$; si M' est elle-même compacte, alors, on prend $K = M'$ et on met l'indice o.

Soit, sur U_j, une base orthogonale $\{ \theta_j^I \}_I$ pour les p-formes. Alors, pour $s \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{A}_{o(p)}(K)$, on définit

$$(2.2.1) \qquad \| \varphi \|_s^2 = \sum_j \sum_I \| (\ell_j \varphi_I^j) \circ \psi_j^{-1} \|_s^2 ,$$

où

$$\varphi = \sum \varphi_I^j \theta_j^I \quad \text{dans } U_j$$

Il est à noter que la somme dans le second membre de (2.2.1) ne renferme qu'un nombre fini de termes non nuls.
Le complété de $\mathcal{A}_{o(p)}(K)$ par rapport à la norme $\| \ \|_s$ sera noté $W^s_{o(p)}(K)$.
Il est bien clair que la norme $\| \ \|_s$ ainsi définie est loin d'être intrinsèque. Cependant, elle est indépendante du choix de la base locale et de la partition de l'unité, à une équivalence près. (Voir KOHN et FOLLAND[14]).
Il en résulte que $W^s_{o(p)}(K)$, en tant qu'espace vectoriel topologique, est bien défini.
Si maintenant $s \in \mathbb{Z}^+$, alors

$$(2.2.2) \qquad \| \varphi \|_s^2 \sim \sum_j \sum_I \sum_{|\alpha| \leq s} \| D^\alpha [(\ell_j \varphi_I^j) \circ \psi_j^{-1}] \|^2$$

Soit $M \subset\subset M'$ un ouvert relativement compact dans M', dont le bord bM est de classe C^∞.
Désignons par $\overline{M}$ la fermeture de M et par $\mathcal{A}_p(\overline{M})$ les formes différentielles de degré p, C^∞ sur $\overline{M}$.
Définissons, pour tout entier s non négatif, la norme $\| \ \|_s$ également par :

$$(2.2.3) \qquad \| \psi \|_s^2 = \sum_j \sum_I \sum_{|\alpha| \leq s} \| D^\alpha [\ell_j \varphi_I^j) \circ \psi_j^{-1}] \|^2 ,$$

où la somme s'étend à tous les j tels que $U_j \cap M \neq \phi$ et les normes à droite sont des $\mathcal{L}^2$- normes intrinsèques sur $\overline{M}$.
Nous noterons $W^s_p(\overline{M})$ le complété de $\mathcal{A}_p(\overline{M})$ par rapport à la métrique $\| \ \|_s$; comme précédemment, $W^s_p(\overline{M})$ est défini de manière intrinsèque comme espace vectoriel topologique.

Soit $K \subset M'$ un voisinage compact de $\overline{M}$; il existe une restriction naturelle

$$E : W^s_{o(p)}(K) \longrightarrow W^s_p(\overline{M}) , \quad s \in \mathbb{Z}^+$$

Pour tout entier positif ℓ construisons une application

$$G_\ell : W^s_p(\overline{M}) \longrightarrow W^s_{o(p)}(K)$$

continue inverse de E.
Nous avons alors le lemme suivant de LIONS.

(2.2.4) Lemme (Lions) :

Soit $\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1 \}$, $\Omega^- = \{ x \in \Omega : x_N \leq 0 \}$,

$C^\ell_o(\Omega^-)$ l'espace des fonctions de classe C^ℓ sur Ω^- à support compact pouvant rencontrer $\{ x : x_N = 0 \}$, $C^\ell_o(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^ℓ à support compact dans Ω.
Alors, il existe une application linéaire

$$G_\ell : C^\ell_o(\Omega^-) \longrightarrow C^\ell_o(\Omega)$$

telle que

$$G_\ell(u)|_{\Omega^-} = u \quad \text{et} \quad \| G_\ell(u) \|_s \leq \| u \|_s$$

pour $0 \leq s \leq \ell$

Démonstration
La matrice $((-\lambda_j)^m)$, avec $1 \leq j \leq \ell+1$, $0 \leq m \leq \ell$, est une matrice de Vandermonde de $-1, -2, \ldots, -\ell-1$ et, par suite , est non singulière. Il en résulte qu'il existe des nombres $C_1, \ldots C_{\ell+1}$ tels que

$$\sum_j C_j (-\lambda_j)^m = 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq m \leq \ell$$

Définissons G_ℓ par

$$(G_\ell(u))(x) = \begin{cases} u(x) & (x_N \leq 0) \\ \sum_{1}^{\ell+1} C_\lambda \, u(x_1, \ldots, x_{N-1}, -\lambda x_N), & (x_N > 0) \end{cases}$$

Alors, pour $x_N > 0$,

$$D^\alpha(G_\ell(u))(x) = \sum_{1}^{\ell+1} (-\lambda)^{\alpha_N} C_\lambda \, D^\alpha u \, (x_1, \ldots x_{N-1}, -\lambda x_N).$$

Il s'en suit que, lorsque $x_N \longrightarrow 0$, les limites du premier et du second membre de $D^\alpha(G_\ell(u))(x)$ sont égales, d'où $G_\ell(u) \in C^\ell$ et que $\| G_\ell(u) \|_s \lesssim \| u \|_s$ pour $0 \leq s \leq \ell$. Enfin, puisque $|(x_1, \ldots, x_{N-1}, -\lambda x_N)| \geq |(x_1, \ldots, x_N)|$, supp $G_\ell(u) \subset \Omega$.

(2.2.5) Proposition : Soit K un voisinage compact de $\overline{M}$. Pour tout entier ℓ positif il existe une application linéaire bornée

$$G_\ell : W_p^\ell(\overline{M}) \longrightarrow W_{o(p)}^\ell(K)$$

qui se prolonge en une application linéaire bornée de $W_p^s(M)$ dans $W_{o(p)}^s(K)$ pour $0 \leq s \leq \ell$.

Démonstration

Choisissons un recouvrement $\{ U_j, \psi_j \}$ de $\overline{M}$ par des cartes locales (dans M') telles que

si $U_j \cap bM \neq \emptyset$, ψ_j applique $M \cap U_j - \bigcup_{\beta \neq j} U_\beta$ dans $\{ x: |x| < 1/2, x_N < 0 \}$, $bM \cap U_j$ dans $\{ x : x_N = 0 \}$ et $U_j - K$ dans $\{ x : x_N > 1 \}$.

Choisissons la partition différentielle de l'unité $\{\rho_j\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_j\}$ de $\overline{M}$ telle que

$$\text{supp } (\rho_j \circ \psi_j^{-1}) \subset \{ x: |x| < 1 \}$$

Si $\varphi \in \mathcal{A}_p(\overline{M})$, alors, nous définissons

$$G_\ell^j(\varphi) = \sum G_\ell\left((\rho_j \varphi_I^j) \circ \psi_j^{-1}\right) \circ \psi_j \theta_I^j$$

si $U_j \cap bM \neq \emptyset$ et

$$G_\ell^j(\varphi) = \rho_j \varphi \text{ , si } U_j \cap bM = \emptyset$$

Posons $G_\ell(\varphi) = \sum_j G_\ell^j(\varphi)$. Il résulte du lemme (2.2.4) précédent que G_ℓ se prolonge en une application bornée de $W_p^s(\overline{M})$ dans $W_{o(p)}^s(K)$ pour $o \leq s \leq \ell$.

(2.2.6) Lemme (Sobolev et Rellich).

Si $s > t \geq o$ sont des entiers positifs, alors, l'inclusion $i: W_p^s(\overline{M}) \to W_p^t(\overline{M})$ est compacte et si $s > \frac{N}{2} + t$, alors, tout $\varphi \in W_p^s(\overline{M})$ est de classe C^t sur $\overline{M}$.

Démonstration :

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée dans $W_p^s(\overline{M})$. Alors , $\{G_s(\varphi_n)\}$ est une suite bornée dans $W_{o(p)}^s(K)$. Il en résulte qu'une sous-suite $\{G_s(\varphi_{n_\alpha})\}$ converge dans $W_{o(p)}^t(K)$; par suite, $\{\varphi_{n_\alpha}\}$ converge dans $W_p^t(\overline{M})$. Si $s > \frac{N}{2} + t$ et $\varphi \in W_p^s(\overline{M})$, alors $G_s(\varphi) \in W_{o(p)}^s(K)$. Ainsi, les composantes de $G_s(\varphi)$ sont C^t sur K, d'où leurs restrictions à $\overline{M}$ sont C^t sur $\overline{M}$.

3 - NORMES TANGENTIELLES DE SOBOLEV.

Soit $\mathbb{R}_-^{N+1} = \{(t,r) \in \mathbb{R}^{N+1} : r \leq o\}$, où $(t_1, t_2, \ldots, t_N, r)$ sont les coordonnées standard sur $\mathbb{R}^{N+1}$. (même si toutefois la métrique n'est pas standard).

Considérons les fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}_-^{N+1}$ et définissons la transformation de Fourier $\mathcal{F}_t$ par

$$(2.3.1) \qquad \mathcal{F}_t\, u(\tau, r) = \tilde{u}(\tau, r) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle t,\tau\rangle} u(t,r)\, dt,$$

l'opérateur Λ_t^s $(s \in \mathbb{R})$ par

(2.3.2) $$\mathcal{F}_t\,(\Lambda_t^s u)\,(\tau, r) = (1+|\tau|^2)^{s/2} \cdot \tilde{u}(\tau, r)$$

et les normes tangentielles de Sobolev $|||\ \ |||_s$ par

(2.3.3) $$|||\ u\ |||_s^2 = \|\Lambda_t^s u\|^2 = \int_{-\infty}^{0} \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\tau|^2)^s |\tilde{u}(\tau,r)|^2\ d\tau\ dr$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \|\ u\ (\cdot, r)\|_s^2\ dr$$

Il est clair que les lemmes de Rellich et de Sobolev sont faux pour ces normes, étant donné que nous n'avons aucun contrôle sur les dérivées dans la direction de r.
Cependant, en vertu du lemme de Lions (Lemme (2.2.4)), on peut établir que

$$\|\ G_s(u)\|_s \lesssim |||\ Du\ |||_{s-1} \qquad \text{pour } o < s \leqslant 1 \text{ et supp}(u)$$

dans un compact fixe ; ce qui implique que $|||\ Du\ |||_{s-1}$ est compacte par rapport à $\|\ \|$ quand $s > o$.

4 - OPÉRATEURS DE DIFFÉRENCE FINIE

Soit u une fonction sur $\mathbb{R}^N$. Définissons

(2.4.1) $$\Delta_h^k u(x) = \frac{1}{2ih}\ [u(x+h_k) - u(x-k_k)]\ ,$$

où $$x \pm h_k = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k \pm h, x_{k+1}, \ldots, x_N).$$

Si β est un multi-indice et $H = (h_{11}, \ldots, h_{1\beta_1}, \ldots h_{n1}, \ldots, h_{n\beta_n})$, on pose

(2.4.2) $$\Delta_H^\beta = \pi_{k=1}^{n} \pi_{k=1}^{\beta_k} \Delta_{h_{k\ell}}^k$$

Si u est une fonction définie sur $\mathbb{R}^{N+1}_-$ (2.3) nous définissons $\Delta_H^\beta u$ uniquement sur les variables tangentielles $t_1,\ldots,t_N$. Vu que nous ne nous intéressons à Δ_H^β que lorsque $H \to 0$, nous pouvons supposer que $|h_{k\ell}| \leqslant 1$ pour tout k et tout ℓ.

Nous emploierons la notation W^s pour désigner indifféremment $W^s(\mathbb{R}^N)$ soit $W^s(\mathbb{R}^{N+1})$.

Nous avons alors la proposition suivante (Voir (14)).

(2.4.3) Proposition : Soit K un compact dans $\mathbb{R}^N$ ou dans $\mathbb{R}^{N+1}_-$ et soient u et v deux fonctions de carré sommable, à support $\subset K$ (dans le cas où $K \subset \mathbb{R}^{N+1}_-$, il n'est nullement besoin que u et v s'annulent sur l'hyperplan $r = 0$).

Soit D un opérateur différentiel du permier ordre et soit $|\beta| = s$. Alors :

(1) Si $u \in W^s$, $\| \Delta_H^\beta u \| \lesssim \| u \|_s$ uniformément quand $H \to 0$.

(2) Si $u \in W^s$, $\| [D, \Delta_H^\beta] u \| \lesssim \| u \|_s$ uniformément quand $H \to 0$.

(3) Si $u \in W^{s-1}$, $(\Delta_H^\beta u, v) = (u, \Delta_H^\beta v) + \mathcal{O}(\| u \|_{s-1} \| v \|)$ uniformément quand $H \to 0$.

(4) Si $u \in W^{s-1}$ et $v \in W^1$,

$$|(u, [\Delta_H^\beta, D] v)| \lesssim \| u \|_{s-1} \| v \|_1$$ uniformément quand $H \to 0$.

(5) Si $u \in W^s$ et $\|\Delta_H^\beta u\|_s$ est bornée quand $H \to 0$ alors $D^\beta u \in W^s$.

Le preuve de cette proposition (2.4.3) nécessite plusieurs résultats préliminaires. Nous supposerons d'abord que $K \subset \mathbb{R}^N$.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire l' espace de toutes les fonctions u de classe C^∞ telles que

$$\sup_{\mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta| < +\infty$$

pour tous les multi-indices α et β, où $D^\beta = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta$

Nous définissons la transformée de Fourier d'une fonction $u \in \mathcal{E}$ par :

$$\mathcal{F}\, u\,(\xi) \equiv \hat{u}\,(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{e}^{\,<x,\xi>} \cdot u(x)\, dx$$

$\mathcal{F}$, ainsi défini, possède les propriétés suivantes (cf. STEIN and WEISS[22]).

(1) $$\mathcal{F}\,(D^\beta u)\,(\xi) = \xi^\beta\, \hat{u}(\xi)\,, \quad \mathcal{F}(x^\alpha u)\,(\xi) = -D^\alpha\, \hat{u}(\xi),$$

et si $u_y(x) = u(x+y)$, $\mathcal{F}(u_y)\,(\xi) = e^{i<y,\xi>} \cdot u(\xi)$

(2) $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur lui-même, et son inverse est donné par

$$\mathcal{F}^{-1}\, u(x) \equiv \check{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i<x\,,\,\xi>}\, u(\xi)\, d(\xi)$$

(3) (Théorème de Plancherel) $\mathcal{F}$ se prolonge en un automorphisme unitaire de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$.

(4) $$\mathcal{F}\,(u\,v)\,(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi-\eta)\, \hat{v}(\eta)\, d\eta$$

,

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, définissons comme au (2.3.2) l'opérateur

$$\Lambda^s : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad \text{par}$$

(2.4.4) $$\Lambda^s_{(u)} = \mathcal{F}^{-1}\,(\,(1+|\xi|^2)^{s/2}\, \hat{u}(\xi)\,).$$

Nous définissons alors le produit scalaire $(\ ,\ )_s$ par

(2.4.5) $$(u,v)_s = (\Lambda^s_{(u)}, \Lambda^s_{(v)}) = (\,(1+|\xi|^2)^s \hat{u}, \hat{v}\,)$$

et la norme $\|\ \ \|_s$ par $\|\,u\,\|_s = (u,u)_s^{1/2}$.

L'espace de Sobolev W^s est le complété de $\mathcal{E}$ par rapport à la norme $\|\ \ \|_s$.

En particulier $W^o = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, et nous écrirons $|| \ ||_o = \| \ \|$.
Il s'en suit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, Λ^s se prolonge en une application unitaire de W^t sur W^{t-s}. De plus, W^{-s} peut être identifié au dual de W^s par rapport au produit scalaire

$$\langle u,v \rangle = \left(\Lambda^s_{(u)}, \Lambda^{-s}(v)\right), \text{ pour } u \in W^s \ , \ v \in W^{-s}.$$

Il résulte des définitions ci-dessus la proposition suivante :

(2.4.6) Proposition : (Inégalité de Schwartz généralisée). Si $u, v \in W^o$ et $u \in W^s$, $s > o$, alors

$$(u,v) \leq \|u\|_s \ \|v\|_{-s}$$

(2.4.7) Lemme : $$\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2} \right)^s \leq 2^{|s|} (1+ |\xi-\eta|^2)^{|s|} ,$$

$\forall \ \xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ et $\forall_s \in \mathbb{R}$.

Démonstration ;

Puisque $|\xi| \leq |\xi-\eta| + |\eta|$, on a

$$|\xi|^2 \leq 2 \ (|\xi-\eta|^2) \ (1+|\eta|^2).$$

Si $s \geq o$ le lemme est démontré en élevant les deux membres à la puissance s ; si $s < o$, nous avons, par le même raisonnement que ci-dessus, en intervertissant ξ et η et en remplaçant s par -s, le même résultat.

(2.4.8) Lemme : Supposons que $K(\xi,\eta)$ est une fonction bornée mesurable sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ telle que pour une certaine constante $c > o$,

$$\int | K (\xi,\eta)| \, d\xi \leq c \ , \ \forall \eta$$

et

$$\int | K (\xi,\eta)| \, d\eta \leq c \ , \ \forall \xi.$$

(Par exemple, ceci est vrai si $|K (\xi,\eta)| \leq |f(\xi-\eta) |$, où f est bornée et $f(\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^{-Q})$ pour Q suffisamment grand quand $|\xi| \to + \infty$).

Alors, l'opérateur $\mathcal{E}$ défini par $\mathcal{E}\, v(\xi) = \int K(\xi,\eta)\, v(\eta)\, d\eta$ est borné sur W^o.

Démonstration : D'après l'inégalité de Schwartz

$$|\mathcal{E}\, v(\xi) \leq \int |K(\xi,\eta)|\, |v(\eta)|\, d\eta$$

$$\leq \int |K(\xi,\eta)|\, |v(\eta)|\, d\eta < \left(\int |K(\xi,\eta|\, d\eta\right)^{1/2} \left(\int |K(\xi,\eta)|\, |v(\eta)|^2\, d\eta\right)^{1/2}$$

Il s'en suit que

$$\|\mathcal{E}\, v\|^2 = \int |\mathcal{E}\, v(\xi)|^2\, d\xi \leq c \int |K(\xi,\eta)|\, |v(\eta)|^2\, d\eta\, d\xi$$

$$\leq \int |K(\xi,\eta)|\, d\xi \int |v(\eta)|^2\, d\eta = c^2 \|v\|^2$$

Des propriétés de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ découle immédiatement le

(2.4.9) Lemme : $$\mathcal{F}(\Delta_h^k u)(\xi) = \frac{\sin h\xi_k}{h}\, \hat{u}(\xi)$$

Par application du lemme (2.4.9) et compte tenu du fait que $\left|\frac{\sin h\xi_k}{h}\right| \leq |\xi_k|$ on a

(2.4.10) Lemme : Si $u \in W^{s'}$, alors $\forall\, \ell$, avec $\ell \leq s'-s$, on a

$$\|\, \Delta_H^\beta u\, \|_\ell \leq \|\, D_u^\beta\, \|_\ell \quad ./.$$

(2.4.11) Lemme : Soit f une fonction de classe C^∞ à support compact. Si $u \in W^{s'-1}$, alors, $\forall \ell$, avec $\ell \leq s'-s$,

$$\|\, [f, \Delta_H^\beta]\, u\, \|_\ell \leq \|\, u\, \|_{\ell+s-1}$$

uniformément quand $H \to o$.

Démonstration : Il suffit de prouver le lemme pour s = 1 car, dans le cas général, il est possible de commuter entre eux les opérateurs Δ_h^k qui interviennent un à la fois dans Δ_H^β. Les termes typiques sont de la forme

$$\Delta_{H'}^{\beta'} \; [f, \Delta_h^k] \; \Delta_{h''}^{\beta''} \quad , \text{ où } \quad \Delta_{H'}^{\beta'} . \; \Delta_h^k \quad \Delta_{H''}^{\beta''} = \Delta_H^\beta \; ;$$

D'après le lemme (2.4.10)

$$\| \Delta_{H'}^{\beta'} \; [f, \Delta_h^k] \; \Delta_{H''}^{\beta''} u \|_\ell \lesssim \| \; [f, \Delta_h^k] \; \Delta_{H''}^{\beta''} u \; \|_{\ell+|\beta'|} \lesssim \| \; \Delta_{H''}^{\beta''} u \|_{\ell+|\beta'|}$$

$$\lesssim \| u \|_{\ell+|\beta'|+|\beta''|} = \| u \|_{\ell+s-1} .$$

Cependant, pous s = 1, le lemme est équivalent à l'estimation

$$\| \Lambda^\ell \; [f, \Delta_h^k \;] \Lambda^{-\ell} \; v \| \lesssim \| v \| \; , \text{ où } v = \Lambda^\ell u.$$

Maintenant $\mathcal{F} (\Lambda^\ell \; [\; f, \; \Delta_h^k \;] \Lambda^{-\ell} v \;) \; (\xi) = \int K(\xi,\eta) \; \hat{v}(\eta) \; d\eta$, où

$$K(\xi \; \eta = \frac{(1+ |\xi|^2)^{\ell/2}}{(1+ |\eta|^2)^{\ell/2}} \quad \left[\frac{\sin h \; \eta_k}{h} - \frac{\sin h \; \xi_k}{h} \right] \; \hat{f}(\xi-\eta) \; .$$

Mais $\dfrac{\sin h \; \eta_k}{h} - \dfrac{\sin h \; \xi_k}{h}$ est borné pour h fixé et est égal à $\eta_k - \xi_k + \mathcal{O}(h^2)$ quand $h \to o$.

Par suite , du lemme (2.4.7), il résulte que

$$| \; K(\xi,\eta) \; | \lesssim (1+ |\xi-\eta|^2)^{|\ell|/2} \; |\xi-\eta| \; |\hat{f}(\xi-\eta) \; |$$

Comme $\hat{f} \in \mathcal{E}$, par application du lemme (2.4.8), s'en suit notre lemme (2.4.11).

(2.4.12) Lemme : Si $f \in \mathcal{E}$, alors $\| f \; u \|_s \lesssim \| u \|_s$ uniformément pour $u \in \mathcal{E}$.

Ainsi la multiplication par f se prolonge en un opérateur borné sur chaque W^s.

Démonstration

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\ \widehat{fu}\ (\xi) = \int \left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2} \right)^{s/2} \hat{f}(\xi-\eta)\ (1+|\eta|^2)^{s/2}\ \hat{u}(\eta)\ d\eta$$

soit $$K(\xi,\eta) = \left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2} \right)^{s/2} \hat{f}(\xi-\eta)$$

et $$v(\eta) = (1+|\eta|^2)^{s/2}\ \hat{u}\ (\eta)$$

D'après (2.4.7), $|\ K(\xi,\eta)| \lesssim \left(1+ |\xi-\eta|^2 \right)^{|s|/2} |\ \hat{f}(\xi-\eta)\ |$.

Puisque $f \in \mathcal{E}$, les hypothèses du lemme (2.4.8) sont satisfaites, et par suite

$$\| f\ u \|_s^2 = \int | \int K\ (\xi,\eta)\ \ v(\eta) d\eta|^2\ \ d\xi \lesssim \| v \|^2\ \ \| u \|_s^2$$

(2.4.13) Lemme : Si $u \in W^s$, $s \geqslant o$, alors :

$$(\Delta_h^k u,\ v) = (u,\ \Delta_h^k\ v) + \mathcal{O}\ (\ \| u \|_s\ \| v \|_{-s}$$

uniformément quand $h \to o$.
(Les produits scalaires étant définis par rapport à la densité de volume $G(x)\ dx$).

Démonstration :
On a

$$\frac{1}{2ih} \int\ u(x+ h_k)\ \overline{v}(x)\ G(x)dx\ =\ \frac{1}{2ih} \int u(x)\ \overline{v}\ (x- h_k)\ dx$$

$$= -\ \frac{1}{2(-i)h}\ \int u(x)\ \overline{v}\ (x- h_k)\ dx$$

$$+\ \frac{1}{2ih} \int u(x)\ \overline{v}\ (x -h_k)[\ G\ (x-h_k) - G(x)\ ]\ dx$$

D'après l'inégalité de Schwarz, le second terme est majoré par

$\| \Delta G\, u \|_{\ell} \, \| v(x-h_k) \|_{-\ell}$, où $\Delta G = \frac{1}{h} [\, G(x- h_k) - G(x) \,]$

Mais $\|v(x-h_k)\|_{-s} = \| v\|_{-s}$ et $\|\Delta G\, u\|_{\ell} \lesssim \| u\|_{\ell}$

d'après le lemme (2.4.12) ci-dessus, puisque $\Delta G \to \frac{\partial G}{\partial x^k}$ quand $h \to o$.

De même on a

$$\frac{1}{2ih} \int u(x-h_k)\, \overline{v}(x)\, G(x)\, dx = - \frac{1}{2(-i)h} \int u(x)\, \overline{v}\, (x+h_k)\, G(x)\, dx$$

$$+ \mathcal{O}\,(\| u \|_s \, \| v \|_{-s})$$

Le lemme découle alors de l'addition de ces résultats ci-dessus.
Nous sommes enfin prêts pour démontrer notre proposition (2.4.3).

Démonstration de la proposition (2.4.3) quand $K \subset \mathbb{R}^N$:

(1) est une conséquence du lemme (2.4.10) en faisant $\ell = 0$

(2) L'opérateur D peut s'écrire sous la forme suivante :

$$D = \sum f_k\, D^k$$

où l'on suppose que les f_k s'annulent à l'extérieur d'un voisinage de K.

Puisque Δ_H^{β} commute avec D^k, on a :

$$[\, D,\, \Delta_H^{\beta} \,] = \sum\, [\, f_k,\, \Delta_H^{\beta} \,]\, D^k.$$

D'où, par application du lemme (2.4.11) avec $\ell = 0$,

$$\| [\, D,\, \Delta_H^{\beta} \,]\, u \| \lesssim \sum \| D^k\, u \|_{s-1} \lesssim \| u \|_s$$

(3) Nous allons prouver une assertion plus forte : si $s' \geq o$ et $u \in W^{s'+s-1}$; alors $\forall \ell$, $o \leq \ell \leq s'$,

$$(\Delta_H^\beta u, v) = (u, \Delta_H^\beta v) + \mathcal{O}(\| u \|_{\ell+s-1} \| v \|_{-\ell})$$

uniformément quand $H \to o$.

La démonstration se fait par récurrence sur s, dont le premier stade nous est fourni par le lemme (2.4.13).

Si $s > 1$, nous écrirons $\Delta_H^\beta = \Delta_h^k \ \Delta_{H'}^{\beta'}$ où $|\beta'| = s-1$. D'après l'hypothèse de récurrence avec s' remplacé par s'+1 (vu que $u \in W^{s'+s-1} = W^{(s'+1)+(s-1)-1}$),

$$(\Delta_H^\beta u, v) = (\Delta_{H'}^{\beta'} u, \Delta_h^k v) + \mathcal{O}(\| \Delta_{H'}^{\beta'} u \|_\ell \| v \|_{-\ell})$$

$$= (u, \Delta_{H'}^{\beta'} \Delta_h^k v) + \mathcal{O} (\| \Delta_{H'}^{\beta'} u \|_\ell \| v \|_{-\ell} + \| u \|_{\ell+s-1} \| \Delta_h^k v \|_{-\ell-1}$$

Mais $\Delta_{H'}^{\beta'} \Delta_h^k = \Delta_h^k \Delta_{H'}^{\beta'} = \Delta_H^\beta$, et d'après le lemme (2.4.10) ,

, $\| \Delta_{H'}^{\beta'} u \|_\ell \lesssim \| u \|_{\ell+s-1}$ et $\| \Delta_h^k v \|_{-\ell-1} \lesssim \| v \|_{-\ell}$

La preuve est alors complète.

(4) Comme dans la démonstration du (2) nous avons

$$[D, \Delta_H^\beta] = \sum [f_k , \Delta_H^\beta] D^k,$$

d'où en vertu de l'inégalité de Schwartz généralisée (2.4.6) et du lemme (2.4.11)

$$| (u, [D, \Delta_H^\beta] v)| \lesssim \| u \|_{s-1} \| \sum [f_k , \Delta_H^\beta] D^k v \|_{1-s}$$

$$\lesssim \| u \|_{s-1} \sum \| D^k v \| \lesssim \| u \|_{s-1} \| v \|_1$$

(5) Du lemme (2.4.9) et de l'inégalité $\left| \frac{\sin h \xi_k}{h} \right| < |\xi_k|$,

$$+\infty > \limsup_{H \to o} \| \Delta_H^\beta u \|_{s'} = \| D^\beta u \|_{s'} .$$

C.Q.F.D.

Preuve de la proposition (2.4.3.) lorsque $K \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Dans ce cas, puisque Δ_H^β est un opérateur tangentiel, les lemmes (2.4.10 ; 2.4.11 ; 2.4.13) restent vrais, avec les mêmes démonstrations, si les normes de Sobolev ordinaires sont remplacées par des normes tangentielles de Sobolev (2.3.3). Il s'en suit que par une démonstration analogue à celle du cas où $K \subset \mathbb{R}^N$, on a les estimations

$$\| \Delta_H^\beta u \| \lesssim |\!|\!| u |\!|\!|_s$$

$$\| [D, \Delta_H^\beta] u \| \lesssim \sum |\!|\!| D^k u |\!|\!|_{s-1}$$

$$(\Delta_H^\beta u, v) = (u, \Delta_H^\beta v) + \mathcal{O}(|\!|\!| u |\!|\!|_{s-1} \| v \|),$$

$$|(u, [D, \Delta_H^\beta] v)| \lesssim |\!|\!| u |\!|\!|_{s-1} \sum \| D^k v \|$$

uniformément quand $H \longrightarrow o$.

(1), (2), (3) et (4) découlent alors des inégalités $|\!|\!| u |\!|\!|_s \lesssim \| u \|_s$ et $\sum |\!|\!| D^k u |\!|\!|_{s-1} \lesssim \| u \|_s$.

De plus, si $u \in W^{s'}$ et $|\alpha| \leq s'$, d'après le lemme (2.4.9) (avec τ_k à la place de ξ_k),

$$+\infty > \limsup_{H \to o} \| \Delta_H^\beta u \|_{s'} \gtrsim \limsup_{H \to o} \| D^\alpha \Delta_H^\beta u \| = \limsup_{H \to o} \| \Delta_H^\beta D^\alpha u \|$$

$$= \| D^\beta D^\alpha u \| = \| D^\alpha D^\beta u \|$$

Ce qui prouve (5).

C.Q.F.D.

CHAPITRE III

LE $\overline{\partial}$ - PROBLÈME DE NEUMANN SUR LES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES À BORD PSEUDO-CONVEXE

Solution du $\overline{\partial}$ - problème de Neumann sur une variété kählérienne $M \subset\subset M'$ à première classe de CHERN, $C(F) > 0$ et à bord bM de classe C^∞ pseudo-convexe.

Notre présentation est fortement inspirée de KOHN et FOLLAND [14].

1 - OPÉRATEURS SUR LES ESPACES DE HILBERT

1 - GENERALITES.

Nous supposerons, sans perte de généralité, dans toute la suite (sauf mention contraire) que M est une sous-variété ouverte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n telle que $\overline{M}$, la fermeture de M dans M', est compacte et que le bord bM de M est une sous-variété de M' de classe C^∞ et de dimension réelle $2n - 1$.

Soit $r : M' \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction réelle telle que $|r(x)|$ est la distance géodésique de $x \in M'$ à bM et :

$$(3.1.1) \qquad \begin{aligned} r(x) &> 0 \quad , \quad \text{si } x \notin \overline{M} \\ r(x) &< 0 \quad , \quad \text{si } x \in M \end{aligned}$$

Il est clair que la fonction r est de classe C^∞ dans un voisinage de bM De plus, il existe $b > 0$ tel que $bM \times (-b,b)$ est difféomorphe à un voisinage de bM [12].

Il résulte de ce difféomorphisme que, si $t^1, t^2, \ldots, t^{2n-1}$ est un système de coordonnées locales C^∞ sur b , alors les fonctions $t^1, \ldots, t^{2n-1}, r$ définissent un système de coordonnées locales sur M'.

(3.1.2) Remarque : A la place de la fonction r construite au moyen de la distance géodésique d'un point $x \in M'$ à bM , on pourrait prendre toute fonction C^∞ $r : M' \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

bM est défini par $r = 0$ et $|dr| = 1$ sur bM ;

$$r(x) < 0 \quad \text{si} \quad x \in M$$
$$r(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \notin \overline{M}$$

Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Alors , $\mathcal{A}_{pq}(F)$ désignera le faisceau des germes des formes C^∞ sur M' de type (p,q) à coefficients dans F et les sections $\Gamma(M', \mathcal{A}_{pq}(F))$ de $\mathcal{A}_{pq}(F)$, c'est-à-dire le module, sur l'anneau des fonctions C^∞ à valeurs complexes, des formes C^∞ de type (p,q) à coefficients dans F , sera noté $C^\infty_{(q,q)}(M', F)$.

L'espace des formes C^∞ sur M de type (p,q), à coefficients dans F sera désigné par $C^\infty_{(p,q)}(M, F)$; $C^\infty_{(p,q)}(\overline{M}, F)$ est le sous-espace de $C^\infty_{(p,q)}(M,F)$ qui consiste en des éléments C^∞ sur $\overline{M}$ (c'est-à-dire la restriction de $C^\infty_{pq}(M',F)$ à M). Enfin, le sous-espace de $C^\infty_{(p,q)}(\overline{M},F)$ qui consiste en des éléments à support compact disjoint de bM sera désigné par $C^\infty_{o(p,q)}(M,F)$.

Soit maintenant $\mathcal{U} = \{ U_j \}$, $j \in \mathcal{J}$, un recouvrement de $\overline{M}$ par des ouverts U_j dans M' au-dessus desquels le fibré F est trivial. Alors, en vertu de (1.2.5), (1.2.23) et (1.2.24) , on définit l'espace

$$\mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F) = \{ \psi \in C^\infty_{(p,q)}(M,F) \mid \int_M (\psi,\psi)(z) \frac{\omega^n}{n!} < +\infty \} .$$

D'après l'inégalité de Schwartz, il vient sur $\mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$ le produit scalaire

$$(\varphi,\psi) = \int_M (\varphi,\psi)(z) \frac{\omega^n}{n!}$$

Pour tout $\psi \in \mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$ nous poserons

$$\| \psi \|^2 = (\psi,\psi)$$

Le complété de $\mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$ pour la L^2- norme ainsi introduite est un espace de Hilbert , noté également $\mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$.
Dans toute la suite $\mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$ désignera cet espace de Hilbert (nous ne le répèterons pas).

2 - EXTENSION DE $\bar{\partial}$ ET DE $\Box_a$.

Soit $\mathcal{D}^T_{(p,q)}(M,F)$ l'ensemble de tous les $\psi \in \mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$ tels qu'il existe une suite $\{\psi_n\}$ avec les propriétés suivantes :

(1) $\psi_n \in C^\infty_{(p,q)}(M,F) \cap \mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$

(2) $\psi = \lim \psi_n$ dans $\mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$

(3) $\{\bar{\partial}\psi_n\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2_{(p,q+1)}(M,F)$

La fermeture de $\bar{\partial}$ est l'application

$$(3.1.3)\quad T : \mathcal{D}^T_{(p,q)}(M,F) \longrightarrow \mathcal{L}^2_{(p,q+1)}(M,F)$$

définie par

$$T\psi = \lim \bar{\partial}\psi_n \quad ,$$

où $\{\psi_n\}$ est une suite de Cauchy qui vérifie les propriétés (1), (2) et (3) ci-dessus.
On remarque que l'opérateur T est bien défini (Voir KOHN[12]).

Soit maintenant $\mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(M,F)$ (a étant la métrique sur la fibre de F) l'ensemble de tous les $\psi \in \mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$ tels qu'il existe $\lambda \in \mathcal{L}^2_{(p,q-1)}(M,F)$ qui vérifie l'équation

$$(\psi, T\,\psi) = (\lambda,\psi) \ , \quad \forall\, \psi \in \mathcal{D}^T_{(p,q-1)}(M,F).$$

Alors, l'opérateur adjoint de T,

$$(3.1.4)\quad T^*_a : \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(M,F) \longrightarrow \mathcal{L}^2_{(p,q-1)}(M,F),$$

est défini par

$$T^*_a\,\psi = \lambda$$

$\mathcal{D}^{T}_{(p,q-1)}(M,F)$ étant dense dans $\mathcal{L}^{2}_{(p,q-1)}(M,F)$, T^{*}_{a} est bien défini.(voir KOHN[12]).

On remarque que si $\psi \in C^{\infty}(M,F) \cap \mathcal{D}^{T}_{(p,q)}(M,F)$ alors, $T\psi = \bar{\partial}\psi$ et que si $\psi \in C^{\infty}(M,F) \cap \mathcal{D}^{T^{*}_{a}}_{(p,q)}(M,F)$, alors $T^{*}_{a}\psi = \vartheta_{a}\psi$, où $C^{\infty}(M,F)$ a été défini au (1.2.22) et ϑ_{a} au (1.2.20) et (1.2.21).

Soit

(3.1.15) $\mathcal{D}^{L}_{(p,q)}(M,F) = \{ \psi \in \mathcal{D}^{T}_{(p,q)}(M,F) \cap \mathcal{D}^{T^{*}_{a}}_{(p,q)}(M,F)$ tel que

$$T\psi \in \mathcal{D}^{T^{*}_{a}}_{(p,q+1)}(M,F) \quad \text{et} \quad T^{*}_{a}\psi \in \mathcal{D}^{T}_{(p,q-1)}(M,F) \} .$$

Nous définissons

(3.1.6) $$L : \mathcal{D}^{L}_{(p,q)}(M,F) \longrightarrow \mathcal{L}^{2}_{(p,q)}(M,F)$$

par

(3.1.7) $$L = T\,T^{*}_{a} + T^{*}_{a}\,T$$

et l'espace $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$ par

(3.1.8) $$\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F) = \{ \psi \in \mathcal{D}^{L}_{(p,q)}(M,F) \mid L\psi = 0 \} .$$

(3.1.9) $$H : \mathcal{L}^{2}_{(p,q)}(M,F) \longrightarrow \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$$

est la projection orthogonale de $\mathcal{L}^{2}_{(p,q)}(M,F)$ sur $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$.

Remarque :

(1) $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F) = \{ \psi \in \mathcal{D}^{T}_{(p,q)}(M,F) \cap \mathcal{D}^{T^{*}_{a}}_{(p,q)}(M,F)$ tel que

$$T\psi = 0 = T^{*}_{a}\psi \}$$

(2) Si $\psi \in C^{\infty}(M,F) \cap \mathcal{D}^{L}_{(p,q)}(M,F)$, alors

$$L\psi = \Box_{a}\psi ,$$

où $\Box_{a}$ a été défini au (1.2.26).

(3.1.11) Définition : Si φ , $\psi \in \mathcal{D}^{T}_{(p,q)}(M,F) \cap \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(M,F)$, on définit la forme hermitienne $((\varphi, \psi))$ par

(3.1.12) $$((\varphi,\psi)) = (T\varphi, T\psi) + (T^*_a\varphi, T^*_a\psi) + (\varphi,\psi)$$

et la norme $((\ , \ ))^{1/2}$ par

(3.1.13) $$((\psi,\psi)) = (T\psi, T\psi) + T^*_a\psi, T^*_a\psi) + (\psi,\psi)$$

L'espace $\mathcal{D}^{L}_{(p,q)}(M,F) = \mathcal{D}^{T}_{(p,q)}(M,F) \cap \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(M,F)$, muni de la norme $((\ ,))^{1/2}$, est préhulbertien . Nous noterons $\mathcal{D}_{(p,q)}(M,F)$ son complété.

3 - POSITION DU PROBLEME

$C^\infty(M,F)$ est l'espace des formes C^∞ sur M à coefficients dans F (1.2.22). Maintenant, nous allons poser le $\overline{\partial}$ - problème de Neumann, pour les formes $\psi \in C^\infty(M;F)$, dans sa forme classique (voir KOHN[12])

Le $\overline{\partial}$ - problème de Neumann consiste à prouver l'existence d'un opérateur $N : \mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F) \longrightarrow \mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$ qui possède les propriétés suivantes

(1) N est borné

(2), Si $\psi \in C^\infty(M,F) \cap \mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$, alors $N\psi \in C^\infty(M,F)$

(3) Si $N\psi = 0$, alors $\psi \in C^\infty(M,F)$, $\Box_a\psi = 0$ et $\overline{\partial}\psi = 0$

(4) Si $\psi \in C^\infty(M,F) \cap \mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$, alors :

$$\psi = \overline{\partial}\, \mathcal{N}_a N\psi + \mathcal{N}_a\, \overline{\partial} N\psi + \alpha,$$

où $\alpha \in$ Ker N

(5) Si $\psi \in C^\infty(M,F) \cap \mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$ et $\overline{\partial}\psi \in \mathcal{L}^2_{(p,q+1)}(M,F)$, alors

$\overline{\partial} N\psi = N\overline{\partial}\psi$ ./.

Si $\psi \in \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$ alors

$L\psi = T T^*_a\psi + T^*_a T\psi = 0.$

Si $L\psi = 0$, alors , $(L\psi ,\psi) = 0$ et, puisque

$$(L\psi,\psi) = \| T\psi \|^2 + \| T_a^* \psi \|^2$$

il s'en suit que $\psi \in \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$. D'où le

(3.1.14) Lemme : $\psi \in \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$ si et seulement si

$$\psi \in \mathcal{D}^L_{(p,q)}(M,F) \text{ et } L\psi = 0 \text{ ./.}$$

On montrerait comme dans KOHN[12] que

$$T^2 = 0 \; ; \; T_a^{*2} = 0$$

L'opérateur T étant clos, les opérateurs $(I + TT_a^*)^{-1}$ et $(I + T_a^*T)^{-1}$ existent et sont bornés, auto-adjoints et partout définis (voir (19 ; p; 307). De plus, nous avons

$$(I + TT_a^*)^{-1} - I = (I - (I+ T\, T_a^*)) \, (I + T\, T_a^*)^{-1}$$

$$= - T\, T_a^* \, (I + T\, T_a^*)^{-1}$$

De même, on a

$$(I + T_a^* T)^{-1} - I = - T_a^* T \, (I+ T_a^* T)^{-1}$$

Posons

$$S = (I + T\, T_a^*)^{-1} + (I + T_a^* T)^{-1} - I$$

Il résulte, du fait que $T(\mathcal{D}^T_{(p,q)}(M,F)) \subset \mathcal{D}^T_{(p,q+1)}(M,F)$ et que $T_a^*(\mathcal{D}^{T_a^*}_{(p,q)}(M,F)) \subset \mathcal{D}^{T_a^*}_{(p,q-1)}(M,F)$, que l'image de S est contenue dans le domaine de définition $T\, T_a^*$ et que

$$T\, T_a^* S = T\, T_a^* (I + T\, T_a^*)^{-1} + T\, T_a^* \left((I + T_a^* T)^{-1} - I \right)$$

$$= T\, T_a^* (I + T\, T_a^*)^{-1}$$

De même, on obtient

$$T_a^* T S = T_a^* T (I + T_a^* T)^{-1}$$

Il s'en suit que $(L + I) S = I$.

L'opérateur $(L+I)^{-1}$, somme de deux opérateurs bornés est alors auto-adjoint. On en déduit que $L + I$ est auto-adjoint et, par suite , L est auto-adjoint. D'où la

(3.1.15) Proposition: (GAFFNEY).

(1) L'opérateur L est auto-adjoint

(2) $(L + I)^{-1}$ existe , est borné, partout défini et s'exprime par

$$(L+I)^{-1} = (I + T T_a^*)^{-1} + (I + T_a^* T)^{-1} - I \quad ./.$$

Puisque $((\psi,\psi))^{1/2} \geq \| \psi \|$, $\forall \psi \in \mathcal{D}_{(p,q)}(M,F)$, d'après le théorème de représentation de FRIEDRICHS (19; p.332), il existe un opérateur auto-adjoint $\mathcal{A}$ avec un domaine de définition $\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}_{(p,q)}(M,F)$, tel que si $\varphi \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ et $\psi \in \mathcal{D}_{(p,q)}(M,F)$ alors

(3.1.16) $\quad ((\varphi,\psi)) = (\mathcal{A}\varphi, \psi)$

Le lemme suivant nous fournit une description utile de l'opérateur L, vu que notre estimation portera sur $((\ , \ ))^{1/2}$.

(3.1.17) Lemme (12) : $\mathcal{D}^{L}_{(p,q)}(M,F) = \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ et $L = \mathcal{A} - I$

Démonstration

Si $\varphi \in \mathcal{D}^{L}_{(p,q)}(M,F)$ et $\psi \in \mathcal{D}_{(p,q)}(M,F)$, il est clair que

(3.1.18) $\quad ((\varphi,\psi)) = ((L+I)\varphi \ , \psi)$

D'où d'après l'unicité de $\mathcal{A}$, on a $\mathcal{A} = L + I$.

Ainsi $\forall \varphi \in \mathcal{D}^{L}_{(p,q)}(M,F)$ et $\forall \psi \in \mathcal{D}_{(p,q)}(M,F)$ on a

(3.1.19) $\quad ((\varphi, \psi)) = (L\varphi + \varphi, \psi)$

(3.1.20) Définition : Nous dirons que la norme $((\ , \ ))^{1/2}$ est complètement continue par rapport à la norme $\| \ \|$ si toute suite bornée dans la norme $((\ , \ ))^{1/2}$ possède une sous-suite convergente dans la norme $\| \ \|$.
Nous avons le lemme suivant dans KOHN[12].

(3.1.21) Lemme : Si la norme $((\ , \ ))^{1/2}$ est complètement continue par rapport à la norme $\| \ \|$, alors, il existe $c > 0$ telle que $\forall \psi \in \mathcal{D}_{(p,q)}(M,F)$ et ψ orthogonale à $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$, on a

$$\|T\psi\|^2 + \|T_a^*\psi\|^2 \geq c \|\psi\|^2$$

Démonstration
Considérons l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F) \times \mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$ muni de la norme $\| \{\varphi \ \psi\} \|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2$
Soit $S : \mathcal{D}_{(p,q)}(M,F) \longrightarrow \mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F) \times \mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$ l'application définie par

$$S\psi = \{ T\psi , \ T_a^* \psi \}$$

Remarquons que l'opérateur S est clos. Nous allons prouver que son image , Im(S) est fermée.
Supposons que Im(S) n'est pas fermée ; alors, il existe une suite $\{\alpha_n\}$ telle que $\alpha_n \in \mathcal{D}_{(p,q)}(M,F)$,
$\lim S(\alpha_n) = \{ \varphi , \psi \} \notin$ Im (S).
Soit $\beta_n = \alpha_n - H\alpha_n$; alors β_n est orthogonal à $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$ et $\lim \beta_n = \{\varphi,\psi\}$.
Maintenant si $\| \beta_n \|$ est bornée, alors

$$((\beta_n, \beta_n)) = \| S(\beta_n)\|^2 + \| \beta_n\|^2$$

est bornée ; d'où, de $\{\beta_n\}$ on pourrait extraire une sous-suite convergente, de limite β . Mais, puisque S est clos, $S(\beta) = \{\varphi,\psi\}$, d'où contradiction avec le fait que $\{\varphi,\psi\} \notin$ Im(S).
Ainsi, en choisissant au besoin une sous-suite, on peut supposer que $\lim \| \beta_n\| = +\infty$

Maintenant soit

$$\sigma_n = \frac{\beta_n}{\| \beta_n \|}$$

Alors, $\lim \| S(\sigma_n) \| = 0$ et $((\sigma_n, \sigma_n))$ est bornée. Il s'en suit que $\{\sigma_n\}$ contient une sous suite convergente $\{\sigma_{n_\nu}\}$ telle que

$$\lim \sigma_{n_\nu} = \sigma \quad \text{et} \quad \lim S(\sigma_{n_\nu}) = \{0,0\}. \text{ D'où}$$

$S(\sigma) = 0$, par suite $\sigma \in \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$; mais comme σ_n est orthogonal à $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$, on en déduit que $\sigma = 0$;

D'autre part, $\| \sigma_n \| = 1$, d'où contradiction avec le fait que $\{\varphi \ \psi\} \notin \mathrm{Im}(S)$. Ainsi l'image de S est fermée.
Soit S_1 la restriction de S à $\mathcal{D}_{(p,q)}(M,F) \ominus \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$ (= éléments de $\mathcal{D}_{(p,q)}(M,F)$ qui sont orthogonaux à $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$), alors, S_1 est injective et son image $\mathrm{Im}(S_1)$, est fermée ; d'où, d'après le théorème du graphe fermé, S_1^{-1} est borné; c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\| S_1(\psi) \|^2 \geq c \| \psi \|^2$$

ce qui prouve notre lemme.

(3.1.22) Théorème (12) : Si $((\ , \ ))^{1/2}$ est complètement continue sur $\mathcal{D}_{(p,q)}(M,F)$ par rapport à $\| \ \|$, alors $L(\mathcal{D}^L_{(p,q)}(M,F))$ est fermé.

Démonstration

Du lemme (3.1.21) on déduit qu'il existe $c > 0$ telle que si $\varphi \in \mathcal{D}^L_{(p,q)}(M,F)$ et φ est orthogonal à $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$, alors $((\varphi,\varphi)) = (L\varphi,\varphi) \geq c \| \varphi \|^2$

Si $\psi = \lim \varphi_n$, alors, nous pouvons supposer que les φ_n sont orthogonaux à $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$ et, par suite, $\| \varphi_n \|$ est bornée. Ainsi $\{\varphi_n\}$ possède une sous-suite dont les moyennes arithmétiques convergent (voir (19), p.80, Théorème de Banach-Saks) ; soit α cette limite , alors , $\psi = L\alpha$.

C.Q.F.D.

2 - THEOREMES D'EXISTENCE ET DE REGULARITE SUR LES VARIETES KÄHLERIENNES $M \subset\subset M'$ DE DIMENSION COMPLEXE n, A PREMIERE CLASSE DE CHERN $C(F) > 0$ ET A BORD bM PSEUDO-CONVEXE DE CLASSE C^∞.

1 - PRELIMINAIRES ET DEFINITIONS

Soit M une sous-variété ouverte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n . Supposons que la fermeture $\overline{M}$ de M est compacte dans M' ($M \subset\subset M'$) et que le bord bM de M est une sous-variété de M' de classe C^∞ et de dimension réelle 2n-1.

Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Nous avons sur $M \subset\subset M'$, comme précédemment (voir le 1) du paragraphe (3.1)), les espaces $C^\infty_{(p,q)}(M,F)$, $C^\infty_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $C^\infty_{o(p,q)}(M,F)$ et $C^\infty(M,F)$.

Pour tout entier $s > 0$, $W^s_{(p,q)}(\overline{M},F)$ désignera l'espace de Sobolev des formes de type (p,q) sur $\overline{M}$ à valeurs dans F et dont les coefficients possèdent des dérivées jusqu'à l'ordre s sur $\overline{M}$ de carré sommable.

(Pour plus de précision, se référer au (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3).

La norme de Sobolev $\| \ \|_0$ étant équivalente à la $\mathcal{L}^2$ - norme $\| \ \|$ alors, l'espace de Sobolev $W^o_{(p,q)}(\overline{M},F)$ n'est autre que l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$ défini plus haut (au 1) du paragraphe (3.1) .

Dans toute la suite , (sauf mention contraire) $W^o_{(p,q)}(\overline{M},F)$ désignera donc l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2_{(p,q)}(M,F)$.

(3.2.1) Définition : Si U est un voisinage de coordonnées dans M' et si $t^1,\ldots, t^{2n-1}$, r sont des fonctions C^∞ sur U telles que $\{t^1,\ldots,t^{2n-1},r\}$ est un système de coordonnées sur U et pour tout $x \in$ U, $(dt^i,dr)(x) = 0$ (1.2.4) alors, les t^i sont appelés coordonnées tangentielles, et le système . $\{ t^i,\ldots, t^{2n-1},r\}$ système de coordonnées dans M' relativement au bord.

Il est à noter que le fait que bM possède un voisinage V de la forme bM X (-b,b) (voir (12 ; 3.7)) donne lieu à la décomposition des formes sur V . Ainsi :

(3.2.2) Définition : Si ψ est défini sur V et si $x \in$ V, la forme ψ est appelée normale au point x , si $dr \wedge \psi = 0$ en x .
Une forme ψ est appelée tangentielle en x si

$$(\psi, \varphi)(x) = 0 \quad (1.2.4).$$

pour toutes les formes qui sont normales en x.

Ainsi, chaque forme ψ sur V peut s'exprimer comme somme

(3.2.3) $\psi = n\psi + t\psi$,

où $n\psi$ est normale en chaque point x de V et $t\psi$ est tangentielle en chaque point x de V.
En termes de coordonnées relativement au bord bM , les formes tangentielles sont celles qui s'expriment en termes des t^i et les formes normales sont celles qui sont divisibles par dr.
Nous avons dans KOHN[12] :

(3.2.4) $*n = t* \quad$ et $\quad n* = *t$

Soit $\{U_j\}$ un recouvrement de $\overline{M}$ par des ouverts de coordonnées holomorphes (dans M') tels que la restriction de F à chaque U_j est trivial.
Nous avons dans CHERN (5 ; p.120) le

(3.2.5) Lemme : Pour tout $\varphi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $\theta \in C^{\infty}_{(p,q+1)}(\overline{M},F)$,

$\psi \in C^{\infty}_{(p,q-1)}(\overline{M},F)$, on a :

$$(\overline{\partial}\varphi, \theta) = (\varphi, \vartheta_a \theta) + \sum \int_{bM} a_j \varphi_j \wedge * \overline{\theta}_j$$

$$(\vartheta_a \varphi, \psi) = (\varphi, \overline{\partial}\psi) + \sum \int_{bM} a_j \varphi_j \wedge * \overline{\psi}_j$$

(3.2.6) Définition : Si U est un voisinage de coordonnées sur M', alors, on dit que U est étoilé sur M si, pour tout nombre λ , tel que $0 \leq \lambda < 1$, nous avons $\lambda(U \cap \overline{M}) \subset U \cap M$.
Ici $\lambda(U \cap \overline{M})$ désigne l'ensemble des points avec des coordonnées $(\lambda z^1(x), \lambda z^2(x), \ldots, \lambda z^n(x))$, où $x \in U \cap \overline{M}$.
Il résulte de cette définition le lemme suivant dû à KOHN (12 ; lemme 3.4).

(3.2.7) Lemme : Il existe un recouvrement de $\overline{M}$ par un nombre fini de voisinages de coordonnées holomorphes $\{U_j\}$ sur M' tels que chaque U_j est étoilé sur M .

Si maintenant on choisit un recouvrement de $\overline{M}$ par des ouverts de coordonnées holomorphes $\{U_j\}$ sur M'au-dessus desquels le fibré F est trivial, alors, par une démonstration analogue à celle de KOHN[12], nous avons la

(3.2.8) Proposition (KOHN) : Si $\psi \in \mathcal{D}'^{T}_{(p,q)}(M,F)$, alors il existe une suite $\{\psi_k\}$ telle que $\psi_k \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $\psi = \lim \psi_k$ et $T\psi = \lim \overline{\partial}\psi_k$.

Démonstration

Soit U un voisinage de coordonnées holomorphes étoilé sur M . Si f est une fonction sur U, on définit pour tout $\lambda \in [0,1]$ une fonction $S_\lambda(f)$ sur U par :

$$S_\lambda(f)\ (x) = f(\ \lambda z^1(x)\ ,\ \lambda z^2(x)\ ,\ldots,\ \lambda z^n(x)\ )$$

Si f est de carré sommable, alors $f = \lim_{\lambda\to 1} S_\lambda(f)$ puisque

$$\| S_\lambda(f) - f \| \leq \int_{\tau U} |S_\lambda(f)-f| \frac{\omega^n}{n!} + \int_{U-\tau U} |S_\lambda(f) - f| \frac{\omega^n}{n!}$$

$$+ \int_{U-\tau U} |f|^2 \frac{\omega^n}{n!}$$

$$\leq \int_{\tau U} |S_\lambda(f)-f|^2 \frac{\omega^n}{n!} + \frac{c}{\lambda^{2n-1}} \int_{\lambda U - \lambda\tau U} |f|^2 \, dx^1 dy^1 \ldots dy^n$$

$$+ \int_{U-\tau U} |f|^2 \frac{\omega^n}{n!}$$

Soit maintenant η , $0 < \eta < 1$, tel que $\int_{U-\eta U} |f|^2 \frac{\omega^n}{n!}$ soit petit ; alors choisissons τ tel que $\eta < \tau < 1$. Il s'en suit que par un choix de λ tel que $\lambda > \frac{\eta}{\tau}$ et suffisamment voisin de 1, $\lim_{\lambda\to 1} S_\lambda(f) = f$

Si maintenant U est tel que la restriction de F à U est triviale et si ψ est une (p,q)-forme sur U et

$$\psi = \psi_{I\overline{J}}\ dZ^I \wedge d\overline{Z}^J\ ,$$

alors on définit $S_\lambda(\psi) = S_\lambda(\psi_{I\overline{J}})\ dZ^I \wedge d\overline{Z}^J$

Notons que

$$\overline{\partial}\, S_\lambda(\varphi) = \lambda\, S_\lambda(\overline{\partial}\varphi)$$

D'où, si ψ et $\overline{\partial}\psi$ sont de carré sommable sur U, alors,

$$\varphi = \lim_{\lambda \to 1} \frac{1}{\lambda}\, S_\lambda(\varphi)$$

et

$$\overline{\partial}\varphi = \lim_{\lambda \to 1} \overline{\partial}\left(\frac{1}{\lambda}\, S_\lambda(\varphi)\right)$$

Soit $\{U_j\}$ un recouvrement de $\overline{M}$ par des voisinages étoilés au-dessus desquels le fibré F est trivial et soit ρ_j des fonctions C^∞ telles que ρ_j a son support dans U_j et $\sum \rho_j = 1$ sur $\overline{M}$.
Si $\varphi \in \mathcal{D}^T_{(p,q)}(M,F)$, alors, il existe une suite $\{\psi_k\}$ telle que

$\psi_k \in C^\infty(M,F) \cap W^o_{(p,q)}(\overline{M},F)$,

$\overline{\partial}\psi_k \in C^\infty(M,F) \cap W^o_{(p,q+1)}(\overline{M},F)$, $\varphi = \lim \psi_k$ et $T\varphi = \lim \overline{\partial}\psi_k$.

Soit ψ_k^j la restriction de ψ_k à U_j et soit $\varphi_k^j = \frac{1}{\lambda_k}\, S_{\lambda_k}(\psi_k^j)$,

où λ_k est choisi tel que $\| \varphi_k^j - \psi_k^j \|$ et $\| \overline{\partial}\varphi_k^j - \overline{\partial}\psi_k^j \|$ sont inférieures à $\frac{1}{k}$.
Soit, maintenant, pour terminer,

$$\varphi_k = \sum \rho_j\, \varphi_k^j$$

Il est clair que $\varphi_k \in C^\infty_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $\varphi = \lim \varphi_k$ et $\overline{\partial}\varphi = \lim \overline{\partial}\varphi_k$.

(3.2.9) Corollaire (KOHN) : Si $\varphi \in C^\infty(M,F) \cap W^o_{(p,q)}(\overline{M},F)$,
$\vartheta_a \varphi \in W^o_{(p,q-1)}(\overline{M},F)$ et pour tout $\psi \in C^\infty_{(p,q-1)}(\overline{M},F)$, on a

$$(\varphi, \overline{\partial}\psi) = (\vartheta_a \varphi, \psi) ,$$

alors $\varphi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(M,F)$.

Démonstration.

Si $\psi \in \mathcal{D}'^{T}_{(p,q-1)}(M,F)$, soit $\psi_k \in C^{\infty}_{(p,q-1}(\overline{M},F)$ telle que $\psi = \lim \psi_k$ et $T\psi = \lim \overline{\partial}\psi_k$. Alors :

$$(\varphi, T\psi) = \lim (\varphi, \overline{\partial}\psi_k) = \lim (\int_a \varphi, \psi_k) = (\int_a \varphi, \psi)$$

si bien que $\varphi \in \mathcal{D}'^{T^*_a}_{(p,q)}(M,F)$ ./.

Définissons l'espace $\mathcal{D}'^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ par :

$$(3.2.10)\quad \mathcal{D}'^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F) = \mathcal{D}'^{T^*_a}_{(p,q)}(M,F) \cap C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F) .$$

Alors, soit $\{U_j\}$ un recouvrement de $\overline{M}$ par des ouverts de coordonnées holomorphes U_j (dans M') au-dessus desquels le fibré F est trivial. On sait que tout $\varphi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ s'exprime sur U_j par $\varphi = \{\varphi_j\}$. Nous avons , comme dans Kohn[12] , la

(.3.2.11) Proposition : $\varphi \in \mathcal{D}'^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ si et seulement si $\varphi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, et pour tout $\psi \in C^{\infty}_{(p,q-1)}(M,F)$ et tout U_j tel que $U_j \cap bM \neq \phi$ on a :

$$\partial r \wedge \overline{\psi}_j \wedge * \varphi_j = 0 \quad \text{sur } bM \quad ./.$$

Démonstration :

Si $\varphi \in \mathcal{D}'^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ alors, d'après (3.2.25),

$$\sum \int_{bM} a_j \psi_j \wedge * \overline{\varphi}_j = 0, \quad \forall\ \psi \in C^{\infty}_{(p,q-1)}(\overline{M},F)$$

si on remplace ψ_j par $\rho\,\psi_j$, où ρ est une fonction à support compact , on obtient

$$\sum \int_{bM} a_j \rho\ t(\psi_j \wedge * \overline{\varphi}_j) = 0$$

Ainsi $t(\psi_j \wedge * \overline{\varphi}_j) = 0$ sur bM et, par suite

$$dr \wedge \psi_j \wedge * \overline{\varphi}_j = 0 \quad \text{sur } bM$$

pour tous les $\psi \in C^{\infty}_{(p,q-1)}(\overline{M},F)$.

Puisque $\psi_j \wedge * \overline{\vartheta}_j$ est de type $(n, n-1)$, on a

$$dr \wedge \psi_j \wedge * \overline{\vartheta}_j = \overline{\partial} r \wedge \psi_j \wedge * \overline{\vartheta}_j = 0 \quad \text{sur } bM.$$

La réciproque s'en suit par application de (3.2.9).

C.Q.F.D.

En termes de coordonnées locales holomorphes sur chaque U_j du recouvrement $\{ U_j \}$, $\vartheta \in C^{\infty}_{(p,q)}(M,F)$ s'exprime par

$$\vartheta_j = \vartheta_{j\, A\overline{B}}\, dZ^A \wedge d\overline{Z}^{\,B}$$

Posons

$$\psi_j = dZ^B \wedge d\overline{Z}^{\,J}$$

Alors en termes de coordonnées locales holomorphes, la condition

$$\partial r \wedge \psi_j \wedge * \overline{\vartheta}_j = 0 \quad \text{sur } bM \tag{3.2.12}$$

est équivalente , d'après (1.2.23), à

$$(\partial r \wedge \psi, \vartheta)\ (x) = 0 \ , \ \forall\, x \in bM \tag{3.2.13}$$

c'est-à-dire, compte tenu de (1.2.6)

$$\sum_k \epsilon^{kJ}_{<kJ>} \frac{\partial r}{\partial z^k} \overline{\vartheta_j^{\overline{B}<kJ>}} = 0 \qquad \text{sur } bM \tag{3.2.14}$$

Soit par conjugaison

$$\sum_k \epsilon^{kJ}_{<kJ>} \frac{\partial r}{\partial z^k} \vartheta_j^{\overline{B}<kJ>} = 0 \qquad \text{sur } bM \tag{3.2.15}$$

où $<kJ>$ désigne l'ensemble ordonné croissant $\{k,J\}$ et $\epsilon^{kJ}_{<kJ>}$ est la signature de la permutation qui transforme $\{k,J\}$ en $<kJ>$.

D'où le

(3.2.16) Corollaire : $\psi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ si et seulement si, relativement à un système de coordonnées holomorphes sur un ouvert U_j de coordonnées au-dessus duquel le fibré holomorphe en droites complexes F est trivial, on a

$$\sum_k \epsilon_{<kJ>}^{kJ} \psi_j^{\overline{B}<kJ>} \frac{\partial r}{\partial z^k} = 0 \quad \text{sur } bM$$

(3.2.17) Remarque : La condition (3.2.12) est équivalente à (voir (3 ; p.112)) :

(3.2.18) $\quad * \psi \wedge \partial r = 0 \quad$ sur bM,

c'est-à-dire, en termes de coordonnées holomorphes sur U_j, si

$$\psi_j = \psi_{j\, A\overline{B}}\, dZ^A \wedge d\overline{Z}^B$$

on a :

(3.2.19) $$\sum_k \psi_{j\, A\, \overline{B}'}^{\;k} \frac{\partial r}{\partial z^k} = 0 \quad \text{sur } bM$$

où B' est le $(q-1)$-uple obtenu du q-uple B par l'élévation d'indice.

(3.2.20) Définition : Une carte spéciale sur M' relativement au bord bM est une carte qui rencontre bM, sur laquelle on a choisi des coordonnées $t^1,\ldots,t^{2n-1}$, r, où r est la fonction qui définit bM et $\{t^1,\ldots,t^{2n-1}\}_{r=0}$ sont un système de coordonnées sur bM, et une base orthonormale $\theta^1,\ldots\theta^n$ pour $\mathcal{A}_{(1,o)}(\overline{M})$ telles que $\theta_n = \sqrt{2}\,\partial r$.

En termes de coordonnées spéciales relativement à bM, en vertu de (1.2.17), le corollaire (3.2.16) se traduit par (voir (13)) :

(3.2.21) Corollaire : Si $\psi = \sum \psi_{I\overline{J}}\, \theta^I \wedge \overline{\theta}^J$ dans une carte spéciale relativement à bM au-dessus de laquelle le fibré F est trivial, alors

$\psi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ si et seulement si $\psi \in C^\infty_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et $\psi_{I\overline{J}} = 0$ sur bM quand $n \in J$.

Définissons maintenant l'espace $\mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ par

$$(3.2.22)\qquad \mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F) = \mathcal{D}_{(p,q)}(M,F) \cap C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F) ,$$

où $\mathcal{D}_{(p,q)}(M,F)$ a été défini à la fin du 2) du paragraphe (3.1) précédent.
Nous avons comme dans KOHN (12; p.138) le

(3.2.23) Lemme : Si $\psi \in C^{\infty}_{(p,q+1)}(\overline{M},F)$ et si

$$(\overline{\partial}\,\psi\ ,\psi) = (\psi\ ,\vartheta_a\,\psi)$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, alors, $\psi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q+1)}(M,F)$.

Démonstration

D'après le corollaire (3.2. 9), il suffit de montrer que

$$(3.2.24)\qquad (\overline{\partial}\,\psi,\psi) = (\psi,\ \vartheta_a\,\psi)\ ,\ \forall\,\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$$

Si ψ s'annule dans un voisinage de bM , d'après (1.2.8), (3.2.24) est vérifié. Ainsi, au moyen d'une partition différentiable de l'unité, il suffit de prouver (3.2.24) pour ψ à support contenu dans un voisinage de coordonnées U qui rencontre bM et au-dessus duquel le fibré F est trivial.
Soit $C^{\infty}_{x(p,q)}(F)$ l'espace des (p,q)-formes à coefficients dans F évalué en $x \in M'$. Si x est dans un voisinage de bM , on a

$$(3.2.25)\qquad C^{\infty}_{x(p,q)}(F) = C^{\infty}_{x(p,q-1)}(F) \wedge (\overline{\partial}r)_{(x)} \oplus \mathcal{I}_{x(p,q)}(F) ,$$

où $\mathcal{I}_{x(p,q)}(F) = \{\ \psi_x \in C^{\infty}_{x(p,q)}(F)\ |\ (\psi_x\ ,\ \sigma_x \wedge (\overline{\partial}r)_{(x)})\ (x) = 0$

pour $\sigma_x \in C^{\infty}_{x(p,q-1)}(F)\ \}$.

Alors, nous obtenons

$$\psi = \sigma \wedge \overline{\partial}r + \beta ,$$

où $\beta_x \in \mathcal{I}_{x(p,q)}(F)$ pour $x \in U$ et $\beta_x = 0$ si $x \notin U$.

Ainsi, d'après (3.2.11), $\beta \in \mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et, par suite ,

$$(3.2.26) \qquad (\overline{\partial}\psi\ ,\ \varphi) = (\ \psi,\ \vartheta_a\ \varphi) + \int_{bM} a\ \overline{\partial}r \wedge \sigma \wedge * \overline{\varphi}\ ,$$

où a est la métrique sur la fibre de F.

Puisque $\sigma \wedge * \overline{\varphi} \in C^{\infty}_{(n,n-2)}(M,F)$, on a

$\partial r \wedge (\sigma \wedge * \overline{\varphi}) = 0$ et, par suite

$t\ (\overline{\partial}r \wedge \sigma \wedge * \overline{\varphi}) = t\ (dr \wedge \sigma \wedge * \overline{\varphi}) = 0$

Il en résulte que l'intégrale sur le bord dans (3.2.26) est nulle et (3.2.24) est vérifiée.

C.Q.F.D.

Le produit scalaire hermitien ((,)) (3.1.12) sur $\mathcal{D}_{(p,q)}(M,F)$ induit sur $\mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ un produit scalaire hermitien , également noté ((,)) , par

$$(3.2.27) \qquad ((\varphi,\psi)) = (T\varphi,\ T\psi) + (T_a^{*}\ \varphi\ ,\ T_a^{*}\psi\ ) + (\varphi,\psi)\ ,$$

$$\forall\ \varphi,\ \psi \in \mathcal{D}_{(p,q)}\ (\overline{M},F).$$

Nous noterons $\tilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F)$ le complété de $\mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ par rapport au produit scalaire ((,)).

L'inclusion $\mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F) \longrightarrow W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ se prolonge de manière unique en une application

$$\tilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F) \longrightarrow W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F)\ .$$

Nous allons montrer que cette application $\tilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F) \longrightarrow W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ est injective afin d'identifier $\tilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F)$ à un sous-espace de $W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et appliquer la construction de Friedrichs (3.1.16).

Si $\{\ \psi_n\ \}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ pour la norme ((,))$^{1/2}$ (3.1.13), alors, $\{\psi_n\}$, $\{\overline{\partial}\psi_n\}$ et $\{\vartheta_a\psi_n\}$ sont toutes des suites de Cauchy dans $W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F)$.

Soit $\psi = \lim \psi_n$ dans $W^o_{(p,q)}(\overline{M},F)$. Puisque T et T^*_a sont des opérateurs clos, d'après (3.2.11), $\psi \in \mathcal{D}^{T}_{(p,q)}(M,F) \cap \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(M,F)$ et

$$((\psi,\psi)) = \|T\psi\|^2 + \|T^*_a\psi\|^2 + \|\psi\|^2$$

Ainsi , si $\psi = 0$, $\lim ((\psi_n, \psi_n)) = ((\psi,\psi)) = 0$; par suite $\psi_n \to 0$ dans $\tilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F)$.

Nous noterons Λ l'opérateur de Friedrichs associé à ((,)) (3.2.27).

Il résulte du fait que pour φ , $\psi \in C^\infty_{o(p,q)}(M,F)$

$$(3.2.28) \qquad ((\varphi,\psi)) = \left((\Box_a + I)\varphi , \psi \right)$$

que l'opérateur Λ est une extension auto-adjointe de l'opérateur hermitien $\Box_a + I \;/\; C^\infty_{o(p,q)}(M,F)$.

Il est à noter que les éléments de $\mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(M,F)$ sont décrits par la condition au bord $n\psi = 0$ sur bM et que les élements C^∞ de $\mathrm{Dom}(\Lambda)$ (= domaine de définition de Λ) sont caractérisés par la condition de la "frontière libre".

Nous avons la proposition suivante (14 ; p.15).

(3.2.29) Proposition : Si $\varphi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, alors $\varphi \in \mathrm{Dom}(\Lambda)$ si et seulement si $\overline{\partial}\varphi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q+1)}(\overline{M},F)$, auquel cas

$$\Lambda(\varphi) = (\Box_a + I)(\varphi).$$

Démonstration

Supposons que $\varphi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F) \cap \mathrm{Dom}(\Lambda)$. Alors

$$\forall \ \psi \in C^\infty_{o(p,q)}(M,F)$$

$$(3.2.30) \qquad (\Lambda(\varphi),\psi) = (\overline{\partial}\varphi, \overline{\partial}\psi) + (\vartheta_a\varphi, \vartheta_a\psi) + (\varphi,\psi)$$

$$= \left((\Box_a + I)\varphi, \psi \right)$$

Puisque $C^{\infty}_{o(p,q)}(M,F)$ est dense dans $W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, nécessairement on a

$$\Lambda \psi = (\Box_a + I)\psi$$

et l'équation (3.2.30) est satisfaite pour tous les $\psi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F)$.

Maintenant soit $\{U_j\}$ un recouvrement de $\overline{M}$ par des ouverts de coordonnées holomorphes U_j (dans M') au-dessus desquels le fibré F est trivial. D'après (3.2. 5) et (3.2.11)

$$(\vartheta_a \psi, \vartheta_a \psi) = (\overline{\partial}\vartheta_a\psi, \psi) + \sum \int_{bM} a_j \vartheta_a \psi_j \wedge * \overline{\psi}_j$$

$$= (\overline{\partial}\vartheta_a\psi, \psi)$$

D'autrepart, on a

$$(3.2.31) \qquad (\overline{\partial}\psi, \overline{\partial}\psi) = (\vartheta_a \overline{\partial}\psi, \psi) - \sum \int_{bM} a_j \overline{\partial}\psi_j \wedge * \overline{\psi}_j$$

$$= (\vartheta_a \overline{\partial}\psi, \psi) \qquad \text{(d'après (3.2.30))}$$

Mais comme $\overline{\partial}\psi \in C^{\infty}_{(p,q+1)}(\overline{M},F)$ et que (3.2.31) est satisfaite $\forall\, \psi \in \mathcal{D}_{p,q}(\overline{M},F)$, il résulte de (3.2.23) que $\overline{\partial}\psi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q+1)}(M,F)$.

Ainsi les termes du bord ne s'annulent que si $\overline{\partial}\psi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q+1)}(\overline{M},F)$. Réciproquement , si $\overline{\partial}\psi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q+1)}(\overline{M},F)$, alors

$$((\psi,\psi)) = \{(\Box_a + I)\psi\ ,\ \psi\} \quad \forall \psi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F) \quad ; \text{ par suite}$$

$$\psi \in \text{Dom}\,(\Lambda) \qquad \text{et} \qquad \Lambda\psi = (\Box_a + I)\,\psi$$

C.Q.F.D.

Les conditions au bord $n\psi = 0$ et $n\overline{\partial}\psi = 0$ sur bM sont les conditions de Neumann du $\overline{\partial}$; le domaine de définition $\text{Dom}(\Lambda)$ de Λ, ou de l'extension auto-adjointe correspondante $\Lambda - I$ de $\Box_a$, consiste en ces formes là mêmes qui satisfont aux conditions de Neumann du $\overline{\partial}$ dans un sens faible convenable.

Ce sont les conditions requises pour que l'adjoint formel de $\overline{\partial}$ (relativement à la métrique a sur la fibre de F) soit son adjoint au sens de la théorie des espaces de Hilbert.

Il est à noter que d'après un théorème de Friedrichs (6 ; p.135) concernant l'identité des extensions faible et forte des opérateurs différentiels, on a $\Lambda = L + I$ (HÖRMANDER (9)).

Cependant nous travaillerons dans la suite exclusivement avec l'opérateur Λ et dans le 5) de ce même paragraphe nous montrerons au moyen d'un théorème de régularité pour Λ que l'on a

$$\Lambda = L + I \quad \text{et par suite} \quad \tilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F) = \mathcal{D}_{(p,q)}(M,F).$$

2 - PSEUDO-CONVEXITE.

(3.2.32) Définition : Le bord bM de M est dit pseudo-convexe si en chaque point $x \in$ bM

$$(3.2.33) \qquad \sum X^{\alpha} X^{\overline{\beta}} \frac{\partial^2 r}{\partial z^{\alpha} \partial \overline{z}^{\beta}}(x) \geqslant 0 ,$$

si

$$(3.2.34) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} X^{\alpha} \frac{\partial r}{\partial z^{\alpha}}(x) = 0 \quad , \text{ pour } x \in \text{b}M.$$

Ici $X = (X^1,..,X^n)$ est un vecteur avec des composantes complexes.
Si la forme hermitienne (3.2.33) est strictement positive pour $X \neq 0$, le bord est dit strictement pseudo-convexe.
Il est à noter que ces définitions sont indépendantes du choix de la fonction r qui définit le bord bM .
Soit $T^{1,0}_{x}(\text{b}M)$ le sous-espace qui consiste en des vecteurs complexes de type (1, tangents à bM en x.
Pour tout $x \in$ bM nous avons la forme hermitienne

$$\Omega_x : T^{1,0}_x(\text{b}M) \times T^{1,0}_x(\text{b}M) \longrightarrow \mathbb{C}$$

par

$$(3.2.35) \qquad \Omega_x(X,X') = \langle (\partial \overline{\partial} r)_x , X \wedge X' \rangle ,$$

où $< \ , \ >$ est la contraction entre les tenseurs contravariants et covariants La forme Ω_x est appelée la forme de Levi et la condition donnée par (3.2.33) et (3.2.34) est équivalente à

(3.2.36) $\Omega_x (X, X) \geq 0$ pour tout $X \in T_x^{1,o}(bM)$,

qui est également invariante.
En termes de champs de vecteurs X, X' à valeurs dans $T^{1,o}(bM)$, la forme de Levi (3.2.36) s'exprime par

(3.2.37) $< \partial\bar{\partial} r , X \wedge \bar{X}'> = < \partial r, [X, \bar{X}'] >$

Cette formule découle du fait que $\partial \bar{\partial} r = - d \partial r$ et de l'expression classique de la dérivée extérieure :

$$< \partial\bar{\partial} r , X \wedge \bar{X}'> = - < d \partial r , X \wedge \bar{X}'>$$

$$= - X(< \partial r, \bar{X}' >) + \bar{X}'(< \partial r, X>) + < \partial r, [X, \bar{X}'] >;$$

et nous avons $<\partial r, \bar{X}'> = 0$ puisque ∂r est de degré $(1,o)$ et $\bar{X}'$ de degré $(o,1)$; de plus

(3.2.38) $< \partial r, X > = < dr, X > = X(r) = 0$

Soit maitenant U une carte spéciale sur M' relativement à bM , au-dessus de laquelle le fibré holomorphe en droites complexes F est trivial. Alors, si $\theta^1,\ldots,\theta^n$ est une base orthonormale de $\mathcal{A}_{1,o}(\bar{M})$ sur U , désignons par $Z_1,..,Z_n$ les champs de vecteurs duaux correspondants respectivement . On a alors

(3.2.39) $Z_k(r) = 0$ si $k < n$ et $Z_n(r) = 1$.

Soient (α_{ij}^k) les $n \times n$ matrices définies par

(3.2.40) $$[Z_i, \bar{Z}_j] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^k Z_k + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}^k \bar{Z}_k$$

alors $\overline{\alpha_{ij}^k} = -b_{ij}^k$.

Soit (c_{ij}) la $(n-1)\times(n-1)$ matrice définie par

$$c_{ij} = a^{n}_{ij} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n-1$$

Il résulte de la forme de Levi (3.2.37) que (C_{ij}) est la forme de Levi en termes de la base ainsi choisie.

3 - THEOREME D'ISOMORPHISME.

Après ce long rappel, nous allons, sans plus tarder, entrer dans le vif de notre sujet.

Nous commencerons par considérer le problème de Neumann relativement à l'opérateur associé au produit scalaire hermitien ((,)) (3.2.27)

Soit $\mathcal{U} = \{U_j\}$ un recouvrement de $\overline{M}$ par des ouverts de coordonnées holomorphes U_j (dans M') au-dessus desquels le fibré holomorphe en droites complexes F est trivial . Pour $\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ contruisons la (o,1)-forme $\xi = \sum \xi_{\overline{\beta}}\, d\overline{z}^{\beta} \in \mathcal{A}_{(o,1)}(\overline{M})$ par :

$$(3.2.41) \qquad \xi_{\overline{\beta}} = a_j \sum \nabla_{\overline{\beta}}\, \psi_j\, {}_{\alpha_1\cdots\alpha_p\, \overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_q}\; \overline{\psi}_j{}^{\alpha_1\cdots\alpha_p\, \overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_q}$$

où

$$(3.2.42) \qquad \overline{\psi}_j{}^{\alpha_1\cdots\alpha_p\, \overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_q} = \sum g^{\alpha_1\overline{\sigma}_1}\, g^{\alpha_p\overline{\sigma}_p}\, g^{\tau_1\overline{\beta}_1}\, g^{\tau_q\overline{\beta}_q}\; \overline{\psi_j\, {}_{\sigma_1\cdots\sigma_p\, \overline{\tau}_1\cdots\overline{\tau}_q}}$$

Il résulte de (1.2.37) que

$$(3.2.43) \qquad \vartheta\, \xi = -\sum g^{\overline{\beta}\alpha}\, \nabla_{\alpha}\, \xi_{\overline{\beta}}$$

$$= -\sum g^{\overline{\beta}\alpha}\, \nabla_{\alpha} \{ a_j\, \nabla_{\overline{\beta}}\, \psi_j\, {}_{\alpha_1\cdots\alpha_p\, \overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_q}\; \overline{\psi}_j{}^{\alpha_1\cdots\alpha_p\, \overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_q} \}$$

Puisque (1.2.7)

$$\delta = \vartheta + \overline{\vartheta}$$

et que

$$\overline{\vartheta} : \mathcal{A}_{(o,1)}(\overline{M}) \longrightarrow \mathcal{A}_{(-1,o)}(\overline{M}) = 0$$

est l'application nulle, il s'en suit que

$$(3.2.44) \qquad \delta\xi = \vartheta\, \xi$$

D'où par intégration de (3.2.43) sur M, compte tenu de (1.2.44) :

$$(3.2.45)\qquad -\int_M \delta\xi\ \frac{\omega^n}{n!} = -\int_M \partial\xi\ \frac{\omega^n}{n!}$$

$$= \int_M \sum g^{\bar\beta\alpha}\,\nabla_\alpha\Big\{a_j\,\nabla_{\bar\beta}\psi_{j\,\alpha_1\cdots\alpha_p\,\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q}\,\overline{\psi_j}^{\alpha_1\cdots\alpha_p\,\bar\beta_1\cdots\beta_q}\Big\}\frac{\omega^n}{n!}$$

$$= \int_M a_j\Big\{\sum g^{\bar\beta\alpha}\sum \nabla_\alpha^{(a)}\,\nabla_{\bar\beta}\psi_{j\,\alpha_1\cdots\alpha_p\,\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q}\,\overline{\psi_j}^{\alpha_1\cdots\alpha_p\,\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q}\Big\}\frac{\omega^n}{n!}$$

$$+\int_M a_j\Big\{\sum g^{\bar\beta\alpha}\sum \nabla_{\bar\beta}\psi_{j\,\alpha_1\cdots\alpha_p\,\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q}\,\overline{\nabla_{\bar\alpha}\psi_j^{\alpha_1\cdots\alpha_p\,\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q}}\Big\}\frac{\omega^n}{n!}$$

Comme $(g^{\bar\beta\alpha})$ et $(g_{\bar\beta\alpha})$ sont définies positives, le dernier terme du second membre de (3.2.45) est positif. D'autre part, si dS est l'élément de volume sur le bord $b\bar M$ de M, alors, d'après la formule de Stokes

$$(3.2.46)\qquad \int_M \delta\xi\ \frac{\omega^n}{n!} = -\int_M\Big\{\sum g^{\bar\beta\alpha}\nabla_\alpha\xi_{\bar\beta}\Big\}\frac{\omega^n}{n!}$$

$$= -\int_M\Big\{\sum \nabla_\alpha\xi^\alpha\Big\}\frac{\omega^n}{n!}$$

$$= -\int_{bM}\Big\{\sum \frac{\partial r}{\partial z^\alpha}\xi^\alpha\Big\}dS$$

$$= -\int_{bM} a_j\Big\{\sum\frac{\partial r}{\partial z^\alpha}\sum g^{\bar\beta\alpha}\big(\nabla_{\bar\beta}\psi_{j\,\alpha_1\cdots\alpha_p\,\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q}\,\overline{\psi_j}^{\alpha_1\cdots\alpha_p\,\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q}\big)\Big\}dS$$

Ainsi de (3.2.45) et (3.2.46) on déduit

(3.2.47)

$$-\int_M a_j \Big\{ \sum g^{\bar\beta \alpha} \sum \nabla_\alpha^{(a)} \nabla_{\bar\beta} \psi_{j\, \alpha_1 \cdots \alpha_p \bar\beta_1 \cdots \bar\beta_q} \overline{\psi}_j^{\alpha_1 \cdots \alpha_p \bar\beta_1 - \bar\beta_q} \Big\} \frac{\omega^n}{n!}$$

$$= \int_M a_j \Big\{ \sum g^{\bar\beta \alpha} \sum \nabla_{\bar\beta} \psi_{j\, \alpha_1 \cdots \alpha_p \bar\beta_1 \cdots \bar\beta_q} \overline{\nabla_{\bar\alpha} \psi_j^{\alpha_1 \cdots \alpha_p \bar\beta_1 \cdots \bar\beta_q}} \Big\} \frac{\omega^n}{n!}$$

$$- \int_{bM} a_j \Big\{ \sum \frac{\partial r}{\partial z^\alpha} \sum g^{\bar\beta \alpha} \big(\nabla_{\bar\beta} \psi_{j\, \alpha_1 \cdots \alpha_p \bar\beta_1 \cdots \bar\beta_q} \overline{\psi}_j^{\alpha_1 \cdots \alpha_p \bar\beta_1 \cdots \bar\beta_q} \big) \Big\} ds$$

Avec notre convention habituelle posons $A = (\alpha_1 \ldots \alpha_p)$, $B = (\beta_1 \ldots \beta_q)$ et $B' = (\beta_1 \ldots \hat{\beta} \ldots \beta_q)$, β allant de β_1 à β_q. Alors si $\psi \in \mathcal{D}_{(p,q)}(\bar M, F)$ (3.2.22) d'après (3.2.11), $\psi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(\bar M, F)$ et d'après (3.2.29) $\bar\partial \psi \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q+1)}(\bar M, F)$, d'où en vertu de la condition du bord (3.2.19), l'intégrale sur le bord (3.2.46) devient :

(3.2.48)

$$\int_M \sigma \xi \frac{\omega^n}{n!} = -\int_{bM} \Big(\sum \frac{\partial r}{\partial z^\alpha} \xi^\alpha \Big) ds$$

$$= -\int_{bM} a_j \Big\{ \sum \frac{\partial r}{\partial z^\alpha} \nabla_{\bar\beta} \psi_{j\, A\bar B'}^{\alpha} \overline{\psi}_j^{A \bar\beta \bar B'} \Big\} ds$$

$$= \int_{bM} a_j \Big\{ \sum \frac{\partial^2 r}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta} \psi_{j\, A\, \bar B'}^{\alpha} \overline{\psi}_j^{A \bar\beta \bar B'} \Big\} ds$$

Il résulte de (3.2.48) que pour tout $\psi \in \mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, (3.2.47) devient :

(3.2.49)

$$-\int_M a_J \Big\{ \sum g^{\bar\beta\alpha} \sum \nabla^{(a)}_{\alpha} \nabla_{\bar\beta} \psi_{j\, \alpha_1\cdots\alpha_p \bar\beta_1\cdots\bar\beta_q} \overline{\psi_j}^{\alpha_1\cdots\alpha_p \bar\beta_1\cdots\bar\beta_q} \Big\} \frac{\omega^n}{n!}$$

$$= \int_M a_j \Big\{ \sum g^{\bar\beta\alpha} \sum \nabla_{\bar\beta} \psi_{j\, \alpha_1\cdots\alpha_p \bar\beta_1\cdots\bar\beta_q} \overline{\nabla_{\bar\alpha} \psi_j^{\alpha_1\cdots\alpha_p \bar\beta_1\cdots\bar\beta_q}} \Big\} \frac{\omega^n}{n!}$$

$$+ \int_{bM} a_j \Big\{ \sum \frac{\partial^2 r}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta} \psi_{j\, A\bar B}^{\ \alpha} \overline{\psi_j}^{A\bar\beta\bar B} \Big\} ds$$

Maintenant, d'après le théorème (1.2.45) , on a

(3.2.50)

$$\Box_a \psi_{j\, \alpha_1\cdots\alpha_p \bar\beta_1\cdots\bar\beta_q} = -\sum g^{\bar\beta\alpha} \nabla^{(a)}_{\alpha} \nabla_{\bar\beta} \psi_{j\, \alpha_1\cdots\alpha_p \bar\beta_1\cdots\bar\beta_q}$$

$$+ \sum_{k=1}^{q} \sum_{\tau} \left(X^{\bar\tau}_{\bar\beta_k} - R^{\bar\tau}_{\bar\beta_k} \right) \psi_{j\, \alpha_1\cdots\alpha_p \bar\beta_1\cdots(\bar\tau)_k\cdots\bar\beta_q}$$

$$+ \sum_i \sum_k \sum_{\tau,\sigma} R^{\tau\ \bar\sigma}_{\alpha_i\ \bar\beta_k} \psi_{j\, \alpha_1\cdots(\tau)_i\cdots\alpha_p \bar\beta_1\cdots(\bar\sigma)_k\cdots\bar\beta_q}$$

De (3.2.49) et (3.2.50) découle pour tout $\psi \in \mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, par intégration sur M :

(3.2.51)

$$(\Box_a\psi,\psi) = \int_M a_j \Big\{ \sum g^{\bar\beta\alpha} \sum \nabla_{\bar\beta}\psi_{j\,\alpha_1\cdots\alpha_p\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q} \nabla_{\bar\alpha}\psi_j^{\alpha_1\cdots\alpha_p\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q} \Big\} \frac{\omega^n}{n!}$$

$$+ \int_{bM} a_j \Big\{ \sum \frac{\partial^2 r}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta} \psi_{j\,A\bar B'} \overline{\psi}_j^{A\bar\beta\bar B'} \Big\}\, ds$$

$$+ \int_M a_j q \Big\{ \sum_{\tau,\sigma} \sum_{\alpha_i,\beta_k} \Big(X_{\bar\sigma}^{\bar\tau} - R_{\bar\sigma}^{\bar\tau} \Big) \psi_{j\,A\bar\tau\bar\beta_2\cdots\bar\beta_q} \overline{\psi}_j^{A\bar\sigma\bar\beta_2\cdots\bar\beta_q}$$

$$+ P \sum_{\tau,\lambda} \sum_{\kappa,\sigma} \sum_{\alpha_i,\beta_k} R_{\lambda\bar\kappa}^{\tau\bar\sigma} \psi_{j\,\tau\alpha_2\cdots\alpha_p\bar\sigma\bar\beta_2\cdots\bar\beta_q} \overline{\psi}_j^{\lambda\alpha_2\cdots\alpha_p\bar\kappa\bar\beta_2\cdots\bar\beta_q} \Big\} \frac{\omega^n}{n!}$$

Soit $\gamma = (i/2\pi)\, X_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$ une (1,1)-forme réelle quelconque. Introduisons en chaque point $z \in M'$ la forme hermitienne

(3.2.52)

$$\textcircled{H}^{p,q}(\gamma;u;z) = \sum_{\tau,\sigma} \sum_{\alpha_i,\beta_k} \Big(X_{\bar\sigma}^{\bar\tau} - R_{\bar\sigma}^{\bar\tau} \Big) u_{A\bar\tau\bar\beta_2\cdots\bar\beta_q} \overline{u}^{A\bar\sigma\bar\beta_2\cdots\bar\beta_q}$$

$$+ P \sum_{\tau,\lambda} \sum_{\kappa,\sigma} \sum_{\alpha_i,\beta_k} R_{\lambda,\bar\kappa}^{\tau,\bar\sigma}\, u_{\tau\alpha_2\cdots\alpha_p\bar\sigma\bar\beta_2\cdots\bar\beta_q} \overline{u}^{\lambda\alpha_2\cdots\alpha_p\bar\kappa\bar\beta_2\cdots\bar\beta_q}$$

dans un tenseur anti-symétrique $U_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q}$, pourvu que $q \geq 1$. Alors, d'après (3.2.52), la formule (3.2.51) devient :

(3.2.53)

$$(\Box_a \psi, \psi) = \int_M a_j \Big\{ \sum g^{\bar{\beta}\alpha} \sum \nabla_{\bar{\beta}} \psi_{j A \bar{B}} \overline{\nabla_{\bar{\alpha}} \psi_j^{A \bar{B}}} \Big\} \frac{\omega^n}{n!}$$

$$+ \int_{bM} a_j \Big\{ \sum \frac{\partial^2 r}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \psi_{j A \bar{B}'}^{\alpha} \overline{\psi_j^{A \bar{B} \bar{B}'}} \Big\} ds$$

$$+ \int_M a_j \, q \, \textcircled{H}^{p,q} (\gamma ; \psi_j ; z) \, \frac{\omega^n}{n!}$$

Supposons que le bord bM est pseudo-convexe. Alors, si la classe caractéristique $C(F)$ du fibré holomorphe en droites F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée

$$\gamma = (i/2\pi) \; X_{\alpha\bar{\beta}} \, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

"suffisamment définie positive", c'est-à-dire, telle que la forme hermitienne $\textcircled{H}^{p,q} (\gamma ; \psi_j ; z)$ est définie positive en tout point z de M', les trois termes du second membre de (3.2.53) sont positifs et on a

(3.2.54) $\quad (\Box_a \psi, \psi) \geq 0 \, , \; \forall \, \psi \in \mathscr{D}_{(p,q)}(\bar{M}, F) \, , \; q \geq 1$

Comme $(g^{\bar{\beta}\alpha})$ et $(g_{\bar{\beta}\alpha})$ sont définies positives, il existe une constante $K_1 > 0$ telle que

$$(3.2.55)\qquad \int_M a_j \Big\{ \sum g^{\bar\beta\alpha} \sum \nabla_{\bar\beta} \psi_{j A\bar B}\, \overline{\nabla_{\bar\alpha} \psi_j{}^{A\bar B}} \Big\} \frac{\omega^n}{n!}$$

$$\geq K_1 \left(\sum_{j,\beta,A,B} \left\| \frac{\partial \psi_{j A\bar B}}{\partial \bar z^\beta} \right\|^2 \right)$$

De même, $\mathcal{K}^{p,q}(\gamma;\ \psi_j;\ z)$ étant définie positive, il existe $K_2 > 0$ telle que

$$(3.2.56)\qquad \int_M a_j\, q\ \mathcal{K}^{p,q}(\gamma;\ \psi_j; z)\ \frac{\omega^n}{n!} \geq K_2\ \|\psi\|^2$$

Ainsi, si $K = \inf(K_1, K_2)$, $\forall\, \psi \in \mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M}, F)$, en vertu de (3.2.53), on a compte tenu de (3.2.55) et (3.2.56) :

$$(3.2.57)\qquad (\Box_a \psi, \psi) \geq K \left(\sum_{j,A,B,\beta} \left\| \frac{\partial \psi_{jA\bar B}}{\partial \bar z^\beta} \right\|^2 + \|\psi\|^2 \right)$$

Ainsi, nous pouvons énoncer le lemme suivant .

(3.2.58) Lemme : Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte , relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n, à bord bM pseudo-convexe de classe C^∞.

Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Si la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée .

$\gamma = (i/2\pi)\ X_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$ "suffisamment définie positive" alors, il existe une constante $c > 0$ telle que , $\forall\, \psi \in \mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M}, F)$, $1 \leq q \leq n$, on a :

$$(\Box_a \psi, \psi) \geq c \left(\|\psi\|^2 + \sum_{j,A,B,\beta} \left\| \frac{\partial \psi_{jA\bar B}}{\partial \bar z^\beta} \right\|^2 \right).$$

Soit maintenant U une carte spéciale sur M' relativement à bM , au-dessus de laquelle le fibré F est trivial. Alors, si $\theta^1, \ldots, \theta^n$ est une base orthonormale pour $\mathcal{A}_{(1,o)}(\overline{M})$ sur U telle que $\theta^n = \sqrt{2}\,\partial r$, soient $Z_1, \ldots, Z_n$ les champs de vecteurs duaux correspondants respectivement.
Choisissons $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ de telle sorte que , si $z \in U \cap bM$, la forme de Levi, (3.2.35) soit diagonale en z , avec $\lambda_1(z), \ldots \lambda_{n-1}(z)$ comme valeurs propres ; c'est-à-dire,d'après (3.2.37) , si (c_{ij}) est la $(n-1) \times (n-1)$ matrice de la forme de Levi :

(3.2.59) $$c_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} + b_{ij}$$

où $b_{ij}(z) = 0$, $z \in U \cap bM$

Si $\psi \in C^{\infty}_{o(p,q)}(U \cap \overline{M}, F)$, alors par intégration on a

(3.2.60)

$$\|\overline{Z}_k(\psi_{A\bar{B}})\|^2 = (\overline{Z}_k(\psi_{A\bar{B}}), \overline{Z}(\psi_{A\bar{B}}))$$

$$= -(Z_k \overline{Z}_k(\psi_{A\bar{B}}), \psi_{A\bar{B}}) + \mathcal{O}(\|\psi\|_1 \|\psi\|)$$

$$\doteq -([Z_k, \overline{Z}_k]\psi_{A\bar{B}}, \psi_{A\bar{B}}) + (Z_k(\psi_{A\bar{B}}), Z_k(\psi_{A\bar{B}}))$$

$$+ \mathcal{O}(\|\psi\|_1 \|\psi\|) .$$

Considérons le terme $([Z_k, \overline{Z}_k]\ \psi_{A\bar{B}}, \psi_{A\bar{B}})$ de (3.2.60). Compte tenu de (3.2.40) , on a :

(3.2.61) $$[Z_k, \overline{Z}_k] = \sum a^i_{kk} Z_i + b^{\bar{i}}_{k\bar{k}} \overline{Z}_{\bar{i}}$$

D'où, si $i < n$, on a :

$$(3.2.62)\qquad \left(\alpha^i_{kk} Z_i(\psi_{A\bar{B}}), \psi_{A\bar{B}}\right) + \left(b^i_{kk} \bar{Z}_i(\psi_{A\bar{B}}), \psi_{A\bar{B}}\right)$$

$$= -\left(\alpha^i_{kk} \psi_{A\bar{B}}, \bar{Z}_i(\psi_{A\bar{B}})\right) + \left(b^i_{kk} \bar{Z}_i(\psi_{A\bar{B}}), \psi_{A\bar{B}}\right)$$

$$+ \mathcal{O}\left(\|\psi\|_1 \|\psi\|\right)$$

$$= \mathcal{O}\left(\|\psi\|_1 \|\psi\|\right)$$

Si maintenant $k = n$, en vertu du corollaire (3.2.21) , on a $\psi_{A\bar{B}} = 0$ sur $b\bar{M}$, si bien que

$$(3.2.63)\qquad \left(\alpha^n_{nn} Z_n(\psi_{A\bar{B}}), \psi_{A\bar{B}}\right) = -\left(\alpha^n_{nn} \psi_{A\bar{B}}, Z_n(\psi_{A\bar{B}})\right)$$

$$+ \mathcal{O}\left(\|\psi\|_1 \|\psi\|\right)$$

$$= \mathcal{O}\left(\|\psi\|_1 \|\psi\|\right)$$

D'autre part, si $k \leq n-1$, d'après (3.2.37), on a

$$\alpha^n_{kk} = \sqrt{2}\ C_{kk} ;$$

d'où

$$(3.2.64)\qquad \left([Z_k, \bar{Z}_k] \psi_{A\bar{B}}, \psi_{A\bar{B}}\right) = \sqrt{2}\left(C_{kk} Z_n(\psi_{A\bar{B}}), \psi_{A\bar{B}}\right)$$

$$+ \mathcal{O}\left(\|\psi\|_1 \|\psi\|\right).$$

D'après (3.2.59) , écrivons

$$C_{kk} = \lambda_k \ \delta_{kk} + b_{kk},$$

où $b_{kk}(z) = 0$, $z \in U \cap bM$.

Alors, (3.2.64) devient :

(3.2.65)

$$\left(\partial_k \delta_{kk} Z_n(\psi_{A\bar{B}}), \psi_{A\bar{B}} \right) = \partial_k \delta_{kk} \left(Z_n(\psi_{A\bar{B}}), \psi_{A\bar{B}} \right)$$

$$= \partial_k \delta_{kk} \left(\psi_{A\bar{B}}, Z_n(\psi_{A\bar{B}}) \right)$$

$$+ \mathcal{O}\left(\|\psi\|^2 \right) + \partial_k \delta_{kk} \int_{bM} a_U Z_n(dr) \, |\psi_{A\bar{B}}|^2$$

$$= \mathcal{O}\left(\|\psi\|_1 \|\psi\| \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_k \int_{bM} a_U \, |\psi_{A\bar{B}}|^2 \ ,$$

où a_U est la métrique sur la fibre de F au-dessus de U :

(3.2.66)

$$\left(b_{kk} Z_n(\psi_{A\bar{B}}), \psi_{A\bar{B}} \right) = \left(b_{kk} \psi_{A\bar{B}}, Z_n(\psi_{A\bar{B}}) \right) + \mathcal{O}\left(\|\psi\|^2 \right)$$

$$+ \int_{bM} a_U Z_n(dr) \, b_{kk} \, |\psi_{A\bar{B}}|^2$$

$$= \mathcal{O}\left(\|\psi\|_1 \|\psi\| \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{bM} a_U \, b_{kk} \, |\psi_{A\bar{B}}|^2$$

Mais, (voir KOHN et FOLLAND (14; p.21)), on a :

$$\left| \int_{bM} a_U \, b_{kk} \, |\psi_{A\bar{B}}|^2 \right| \leq \sup |b_{kk}| \int_{bM} |\psi|^2 < \sup |b_{kk}| \, \mathcal{O}(\|\psi\|_1 \, \|\psi\|)$$

où le sup est pris sur le support de ψ. Puisque $b_{kk}(z) = 0$, supp $|b_{kk}|$ peut être rendu arbitrairement petit en choisissant supp ψ petit.
Par combinaison de (3.2.62) , (3.2.63) , (3.2.64), (3.2.65) et (3.2.66) on obtient :
(3.2.67)

$$\| \bar{Z}_k(\psi_{A\bar{B}}) \|^2 + \lambda_k \int_{bM} a_U \, |\psi_{A\bar{B}}|^2 = \| Z_k(\psi_{A\bar{B}}) \|^2 + \mathcal{O}(\|\psi\|_1 \, \|\psi\|)$$

Soit $\{U_j\}$ un recouvrement de $\bar{M}$ par des ouverts de coordonnées holomorphes (dans M') au-dessus desquels le fibré holomorphe en droites complexes F est trivial et tels que si $U_j \cap bM \neq \phi$, alors U_j est une carte spéciale sur M' relativement à bM . De plus, si U_j est une carte spéciale sur M' relativement à bM , choisissons les vecteurs $Z_1, \ldots Z_{n-1}$ tels que si $z \in U_j \cap bM$, la forme de Levi soit diagonale en z , avec des valeurs propres $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_{n-1}(z)$.
Alors, si $\{\rho_j\}$ est une partition différentiable de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_j\}$, il vient par intégration, compte tenu de (3.2.67) et en choisissant sur U_j, quand $U_j \cap bM = \phi$, une base orthonormale pour $\mathcal{A}_{(1,o)}(\bar{M})$:
(3.2.68)

$$\sum_{k,j,A,B} \| \bar{Z}_k(\psi_{jA\bar{B}}) \|^2 + \lambda_k \int_{bM} a_j \, |\psi_{jA\bar{B}}|^2 = \sum_{k,j,A,B} \| Z_k(\psi_{jA\bar{B}}) \|^2 + \mathcal{O}(\|\psi\|_1 \, \|\psi\|)$$

Mais, comme d'après (1.2.15), les $\bar{Z}_k$ sont des combinaisons linéaires des $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$ avec des coefficients C^∞ sur $\bar{M}$, alors il s'en suit que les $\bar{Z}_k(\psi_{jA\bar{B}})$ sont des combinaisons linéaires des $\frac{\partial \psi_{jA\bar{B}}}{\partial \bar{z}^i}$ avec également des coefficients C^∞ sur $\bar{M}$; d'où en vertu du lemme (3.2.58), il existe une constante $K_3 > 0$ telle que , d'après (3.2.68) :
(3.2.69)

$$\sum_{k,j,A,B} \| Z_k(\psi_{jA\bar{B}}) \|^2 \leq K_3(\Box_a \psi, \psi) + \mathcal{O}(\|\psi\|_1 \, \|\psi\|)$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}_{(p,q)}(\bar{M},F)$, $1 \leq q \leq n$.

Finalement, les $Z_k(\psi_{jA\bar{B}})$ étant également des combinaisons des $\frac{\partial \psi_{jA\bar{B}}}{\partial z^i}$ (1.2.15), il résulte de ce qui précède que les dérivées du premier ordre sont des combinaisons linéaires des $Z_k(\psi_{jA\bar{B}})$, $\bar{Z}_k(\psi_{jA\bar{B}})$ avec des coefficients C^∞ sur $\bar{M}$.

Ainsi pour tout $\psi \in \mathscr{D}_{(p,q)}(\bar{M},F)$, $1 \leq q \leq n$, en vertu de (3.2.58) et (3.2.69) on a :

$$(3.2.70) \qquad \|\psi\|_1^2 \lesssim (\Box_a\psi,\psi) + \mathcal{O}(\|\psi\|_1 \, \|\psi\|)$$

soit d'après (2.1.7), il existe $\varepsilon > 0$ et $K > 0$ telles que

$$(3.2.71) \qquad \|\psi\|_1^2 \lesssim ({}_a\psi,\psi) + \varepsilon \, \|\psi\|_1^2 + K \, \|\psi\|^2 .$$

Mais, comme d'après (3.2.58) $(\Box_a\psi,\psi) \gtrsim \|\psi\|^2$, il s'en suit que la constante ε étant suffisamment petite :

$$(3.2.72) \qquad \|\psi\|_1^2 \lesssim (\Box_a\psi,\psi)$$

et en particulier

$$(3.2.73) \qquad \|\psi\|_1^2 \lesssim (\Box_a\psi,\psi) + \|\psi\|^2$$

$$\forall \, \psi \in \mathscr{D}_{(p,q)}(\bar{M},F) \ , \ 1 \leq q \leq n.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

(3.2.74) Théorème : (Inégalité de Gårding).

Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n , à bord bM de classe C^∞ pseudo-convexe.

Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Si la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma = (i/2\pi) \, X_{\alpha\bar{\beta}} \, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ "suffisamment définie positive" alors, pour tout $\psi \in \mathscr{D}_{(p,q)}(\bar{M},F)$, $1 \leq q \leq n$, on a

$$\|\psi\|_1^2 \lesssim (\Box_a\psi,\psi) + \|\psi\|^2$$

Il résulte du théorème (3.2.74) , par complétion, que $\forall \psi \in \mathrm{Dom}\ (\Lambda)$, $1 \leq q \leq n$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(3.2.75) \qquad ((\psi,\psi)) \geq c \, \|\psi\|_1^2$$

D'autre part, $\forall\ \vartheta,\ \psi \in \mathrm{Dom}(\Lambda)$, il existe $c' > 0$ telle que

$$(3.2.76) \qquad |((\vartheta,\psi))| \leq c' \, \|\vartheta\|_1 \ \|\psi\|_1$$

Il découle de (3.2.75) et (3.2.76) que les normes $((\ , \ ))^{1/2}$ et $\| \ \|_1$ sont équivalentes sur $\mathrm{Dom}\ (\Lambda)$, $1 \leq q \leq n$; par suite, du théorème de représentation de Riesz (19 ; p.61) on déduit que $\mathrm{Dom}\ (\Lambda)$ est isomorphe à $W^{o}_{p,q}(\overline{M},F)$, $1 \leq q \leq n$.
Nous avons donc le théorème suivant :

(3.2.77) Théorème : Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte, relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n, à bord bM de clase C^{∞} pseudo-convexe. Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'.
Si la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma = (i/2\pi)\ X_{\alpha\overline{\beta}}\, dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}$ "suffisamment définie positive" alors, $\mathrm{Dom}\ (\Lambda)$ est isomorphe à $W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leq q \leq n$ ./.

Le reste du présent chapitre consistera à prouver à l'aide des théorèmes (3.2.74) et (3.2.77) des théorèmes d'existence et de régularité pour le $\overline{\partial}$ -problème de Neumann. A ce propos, nous supposerons donc (sauf mention contraire), que $M \subset\subset M'$ est une variété kählérienne à bord bM pseudo-convexe de classe C^{∞} et que M' est de dimension complexe n et munie d'un fibré holomorphe en droites complexes F dont la classe caractéristique $C(F)$ contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma = (i/2\pi)\ X_{\alpha\overline{\beta}}\, dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}$ "suffisamment définie positive".

Nous commencerons d'abord par démontrer un théorème appelé "principal" selon la terminologie de KOHN et FOLLAND (44).

4 - THEOREME PRINCIPAL.

a) Régularité intérieure.

A l'aide du théorème (3.2.74) (Inégalité de Gårding), nous allons prouver en termes de $\Lambda\psi = (\Box_a + I)\psi$, quand ψ est C^∞, des estimations a priori pour ψ à l'intérieur de M.

A cette fin, soient U et V deux ouverts de M' avec

$$V \subset \bar{V} \subset U \subset \bar{U} \subset M,$$

et ρ_1 une fonction C^∞ à valeurs réelles et à support dans U, avec $\rho_1 = 1$ sur $\bar{V}$

Nous supposerons, moyennant une partition différentiable de l'unité, que U est un ouvert de coordonnées sur M', avec des coordonnées $x_1,\ldots,x_{2n}$, au-dessus duquel le fibré holomorphe en droites complexes F est trivial. $C^\infty_o(V)$ désignera l'espace des fonctions C^∞ sur V à valeurs réelles et à support dans V ; $C^\infty_{(p,q)}(U,F) = C^\infty_{(p,q)}(U \cap \bar{M},F)$.

(3.2.78) Lemme : $\forall\ \rho \in C^\infty_o(V)$, on a

$$\|\rho\psi\|_1^2 \lesssim \|\rho_1 \Lambda \psi\|^2 + \|\psi\|^2$$

uniformément pour $\psi \in \mathrm{Dom}\,(\Lambda) \cap C^\infty_{(p,q)}(U,F)$, $1 \leq q \leq n$.

Démonstration : D'après le théorème (3.2.74), il suffit d'estimer $((\rho\psi,\rho\psi))$. Puisque par intégration par partie tous les termes sur le bord s'annulent, on a :

$$\begin{aligned}(\bar\partial\rho\psi,\bar\partial\rho\psi) &= (\rho\bar\partial\psi,\bar\partial\rho\psi) + O(\|\psi\|\|\rho\psi\|_1)\\ &= (\bar\partial\psi,\rho\bar\partial\rho\psi) + O(\|\psi\|\|\rho\psi\|_1)\\ &= (\bar\partial\psi,\bar\partial\rho^2\psi) + (\bar\partial\psi,[\rho,\bar\partial]\rho\psi) + O(\|\psi\|\|\rho\psi\|_1)\\ &= (\bar\partial\psi,\bar\partial\rho^2\psi) + O(\|\psi\|\|\rho\psi\|_1),\end{aligned}$$

vu que les termes qui manquent sont estimés au moyen de l'inégalité de Schwarz et que $[\rho, \overline{\partial}]$ est d'ordre zéro.

De même

$$(\lambda_a \rho\psi, \lambda_a \rho\psi) = (\lambda_a \psi, \lambda_a \rho^2 \psi) + O(\|\psi\| \|\rho\psi\|_1)$$

Il s'en suit que

$$\langle\langle \rho\psi, \rho\psi \rangle\rangle = \langle\langle \psi, \rho^2\psi \rangle\rangle + O(\|\psi\| \|\rho\psi\|_1)$$

$$= (\Lambda\psi, \rho^2\psi) + O(\|\psi\| \|\rho\psi\|_1)$$

$$\leq \|\rho_1 \Lambda\psi\|^2 + \varepsilon \|\rho\psi\|_1^2 + K\|\psi\|^2,$$

avec $\varepsilon > 0$ et $K > 0$, puisque $\rho_1 = 1$ sur supp ρ et $\|\rho^2\psi\| \lesssim \|\psi\|$

De l'estimation ci-dessus et du théorème (3.2.74) s'en suit la preuve complète de notre lemme.

On démontrerait de manière analogue le

(3.2.79) Corollaire : Le résultat (3.2.78) demeure inchangé si ρ est une matrice de fonction dans $C_o^\infty(V)$ qui agit sur les composantes de ψ.

Soit β un multi-indice d'ordre k. Si $\psi \in C^\infty_{(p,q)}(M, F)$, alors dans l'ouvert de coordonnées U au-dessus duquel F est trivial, on sait que ψ s'exprime en termes de coordonnées holomorphes sur U par :

$$\psi = \sum \psi_{A\overline{B}} \, dZ^A \wedge d\overline{Z}^B$$

L'opérateur D^β (2.1.5) agit sur ψ comme suit :

$$(3.2.80) \qquad D^\beta \psi = \sum D^\beta (\psi_{A\overline{B}}) \, dZ^A \wedge d\overline{Z}^B,$$

c'est-à-dire que D^β agit sur les composantes de ψ.

(3.2.81) Lemme : Avec ρ, ψ comme dans le lemme (3.2.78), soit β un multi-indice d'ordre k. Si D^β agit sur les composantes des formes alors

$$\langle\!\langle D^\beta \rho\psi, D^\beta \rho\psi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \psi, \rho (D^\beta)' D^\beta \rho\psi \rangle\!\rangle + O\left(\|\rho'\psi\|_k \|\rho\psi\|_{k+1}\right),$$

où $(D^\beta)'$ est l'adjoint formel de D^β et ρ' désigne plusieurs matrices de fonctions comprenant ρ et ses dérivées (par exemple $\rho'\psi = [\bar\partial, \rho]\psi$).

Démonstration : En procédant de la même manière que dans la démonstration du lemme (3.2.78) on a :

(3.8.82)

$$\left(\bar\partial D^\beta \rho\psi, \bar\partial D^\beta \rho\psi\right) = \left(D^\beta \bar\partial \rho\psi, \bar\partial D^\beta \rho\psi\right) + O\left(\|\rho\psi\|_k \|\rho\psi\|_{k+1}\right)$$

$$= \left(D^\beta \rho \bar\partial\psi, \bar\partial D^\beta \rho\psi\right) + O\left(\|\rho'\psi\|_k \|\rho\psi\|_{k+1}\right)$$

$$= \left(\bar\partial\psi, \rho (D^\beta)' \bar\partial D^\beta \rho\psi\right) + O\left(\|\rho'\psi\|_k \|\rho\psi\|_{k+1}\right)$$

$$= \left(\bar\partial\psi, \bar\partial \rho (D^\beta)' D^\beta \rho\psi\right) + O\left(\|\rho'\psi\|_k \|\rho\psi\|_{k+1}\right)$$

$$+ \left(\bar\partial\psi, [\rho (D^\beta)', \bar\partial] D^\beta \rho\psi\right)$$

Mais $\left(\bar\partial\psi, [\rho (D^\beta)', \bar\partial] D^\beta \rho\psi = \left([\lambda_a, D^\beta \rho] \bar\partial\psi, D^\beta \rho\psi\right)\right.$ et

(3.2.83) $[\lambda_a, D^\beta \rho] \bar\partial\psi = [\lambda_a, D^\beta] \rho \bar\partial\psi - D^\beta [\lambda_a, \rho] \bar\partial\psi$

$$= [\lambda_a, D^\beta] \bar\partial \rho\psi + [\lambda_a, D^\beta] [\rho, \bar\partial]\psi - D^\beta [[\lambda_a, \rho], \bar\partial]\psi$$

$$- D^\beta \bar\partial [\lambda_a, \rho]\psi$$

En prenant le produit scalaire avec $D^\beta \rho\psi$, le premier terme est :

(3.2.84) $\mathcal{O}\left(\| \rho\psi \|_{k+1} \| \rho\psi \|_k \right)$;

et le second et le troisième termes sont

(3.2.85) $\mathcal{O}\left(\| \rho'\psi \|_k \| \rho\psi \|_k \right) = \mathcal{O}\left(\| \rho'\psi \|_k \| \rho\psi \|_{k+1} \right)$;

et pour le dernier terme, d'après l'inégalité de Schwarz (2.4.6) on a :

(3.2.86)

$$\left(D^\beta \bar\partial [\mathcal{J}_a, \rho]\psi, D^\beta \rho\psi\right) \lesssim \| D^\beta \bar\partial [\mathcal{J}_a, \rho]\psi \|_{-1} \| D^\beta \rho\psi \|_1$$

$$\lesssim \| \rho'\psi \|_k \| \rho\psi \|_{k+1}$$

Enfin, après avoir accompli les mêmes calculs pour $(\mathcal{J}_a D^\beta \rho\psi$, $\mathcal{J}_a D^\beta \rho\psi)$, le résultat énoncé s'en suit par addition.

(3.2.87) <u>Théorème</u> : Pour tout $\rho \in C_o^\infty(V)$ et tout $s \in \mathbb{Z}^+$,

$$\| \rho\psi \|_{s+2}^2 \lesssim \| \rho_1 \Lambda\psi \|_s^2 + \| \psi \|^2$$

uniformément pour $\psi \in \mathrm{Dom}(\Lambda) \cap C^\infty_{(p,q)}(U, F)$, $1 \leq q \leq n$.

<u>Démonstration</u> : Pour $s = 0$, on a

$$\| \rho\psi \|_2^2 \sim \sum_k \| D^k \rho\psi \|_1^2 + \| \rho\psi \|_1^2 \lesssim \sum_k \| D^k \rho\psi \|_1^2 + \| \rho \Lambda\psi \|^2 + \| \psi \|^2$$

d'après le lemme (3.2.78).

Compte tenu du théorème (3.2.74) et du lemme (3.2.81) ,

$$\| D^k \rho \Psi \|_1^2 \lesssim ((D^k \rho \Psi , D^k \rho \Psi))$$

$$= ((\Psi , \rho (D^\beta)' D^k \rho \Psi)) + O \left(\| \rho' \Psi \|_1 \| \rho \Psi \|_2 \right)$$

$$= \left(\Lambda \Psi , \rho (D^\beta)' D^k \rho \Psi \right) + O \left(\| \rho' \Psi \|_1 \| \rho \Psi \|_2 \right)$$

$$= \left(\rho_1 \Lambda \Psi , \rho (D^\beta)' D^k \rho \Psi \right) + O \left(\| \rho' \Psi \|_1 \| \rho \Psi \|_2 \right)$$

$$\leq K_1 \| \rho_1 \Lambda \Psi \|^2 + \varepsilon_1 \| \rho \Psi \|_2^2 + K_2 \| \rho' \Psi \|_1^2 + \varepsilon_2 \| \rho \Psi \|_2^2$$

en vertu de (2.1.7) . D'après le corollaire (3.2.79),

$$\| \rho' \psi \|_1^2 \lesssim \| \rho_1 \Lambda \psi \|^2 + \| \psi \|^2$$

Par sommation sur k il vient

$$\| \rho \psi \|_2^2 \lesssim \| \rho_1 \Lambda \psi \|^2 + \| \psi \|^2 + \varepsilon \| \rho \psi \|_2^2, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{ce qui}$$

prouve le théorème pour $s = 0$

Par récurrence, supposons le théorème vrai pour s-1. Alors ,

(3.2.88)

$$\| \rho \psi \|_{s+2}^2 \sim \sum_{|\beta| = s+1} \| D^\beta \rho \psi \|_1^2 + \| \rho \psi \|_{s+1}^2 \lesssim \sum_{|\beta| = s+1} \| D^\beta \rho \psi \|_1^2$$

$$+ \| \rho_1 \Lambda \psi \|_{s-1}^2 + \| \psi \|^2$$

Comme ci-dessus d'après le théorème (3.2.74) et le lemme (3.2.81) on a

(3.2.89) $$\| D^{\beta} \rho\psi \|_1^2 \lesssim ((D^{\beta}\rho\psi , D^{\beta}\rho\psi))$$

$$= ((\Psi, \rho(D^{\theta})' D^{\beta}\rho\Psi)) + O\left(\|\rho'\Psi\|_{s+1}\|\rho\Psi\|_{s+2}\right)$$

$$= \left(\Lambda\Psi, \rho(D^{\theta})' D^{\beta}\rho\Psi\right) + O\left(\|\rho'\Psi\|_{s+1}\|\rho\Psi\|_{s+2}\right)$$

$$\leq |(\rho_1\Lambda\Psi, \rho(D^{\theta})' D^{\beta}\rho\Psi)| + K\|\rho'\Psi\|_{s+1}^2 + \varepsilon\|\rho\Psi\|_{s+2}^2$$

D'après l'inégalité de Schwarz (2.4.6)

(3.2.90)

$$|(\rho_1\Lambda\Psi, \rho(D^{\theta})' D^{\beta}\rho\Psi)| \leq \|\rho_1\Lambda\Psi\|_s \|\rho(D^{\theta})' D^{\beta}\rho\Psi\|_{-s}$$

$$\leq K'\|\rho_1\Lambda\Psi\|_s^2 + \varepsilon'\|\rho\Psi\|_{s+2}^2$$

Finalement, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

(3.2.91) $$\| \rho' \psi \|_{s+1}^2 \lesssim \| \rho_1\Lambda\psi \|_{s-1}^2 + \| \psi \|^2 \lesssim \| \rho_1\Lambda\psi \|_s^2 + \| \psi \|^2$$

Ainsi, compte tenu de (3.2.88) , (3.2.89), (3.2.90) et (3.2.91) s'en suit le théorème énoncé ./.

C.Q.F.D.

Montrons maintenant que lorsque $\Lambda\psi$ est C^{∞} à l'intérieur de M, alors la forme ψ l'est également. A ce propos, nous allons commencer par montrer que dans M les éléments de $\mathcal{D}_{p,q}(M,F)$ sont localement dans $W^1_{(p,q)}(\overline{M},F)$; soit plus précisément nous avons les lemmes suivants.

(3.2.92) Lemme : Pour tout $\rho \in C_o^\infty(\overline{M})$, $((\rho\psi,\rho\psi)) \lesssim ((\psi,\psi))$ uniformément pour $\psi \in \mathscr{D}_{(pq)}(\overline{M},F)$

Démonstration :

$$(\bar\partial \rho\psi, \bar\partial\rho\psi) = (\rho\bar\partial\psi, \rho\bar\partial\psi) + ([\bar\partial,\rho]\psi, [\bar\partial,\rho]\psi) + 2\,\mathrm{Re}\,(\rho\bar\partial\psi, [\bar\partial,\rho]\psi)$$

$$\lesssim \|\rho\bar\partial\psi\|^2 + \|\rho'\psi\|^2 + \|\rho\bar\partial\psi\|\,\|\rho'\psi\|$$

$$\lesssim \|\bar\partial\psi\|^2 + \|\psi\|^2$$

De même, on a

$$(\nabla_a\rho\psi, \nabla_a\rho\psi) \lesssim \|\nabla_a\psi\|^2 + \|\psi\|^2 \quad \text{par suite}$$

$$((\rho\psi,\rho\psi)) \lesssim \|\bar\partial\psi\|^2 + \|\nabla_a\psi\|^2 + \|\psi\|^2 = ((\psi,\psi))$$

C.Q.F.D.

(3.2.93) Lemme : Pour toute fonction à valeurs réelles $\rho \in C_o^\infty(\overline{M})$, $\rho\psi \in W^1_{(p,q)}(\overline{M},F)$ pour tout $\psi \in \widetilde{\mathscr{D}}_{pq}(M,F)$, $1 \le q \le n$.

Démonstration

Soit $\{\psi_k\} \subset \mathscr{D}_{pq}(\overline{M},F)$ une suite convergente dans la norme $((\ ,\ ))^{1/2}$. Alors en vertu du théorème (3.2.74) et le lemme (3.2.92),

$$\|\rho(\psi_k-\psi_m)\|_1^2 \lesssim ((\rho(\psi_k-\psi_m), \rho(\psi_k-\psi_m)))$$

$$\leq (\!(\psi_k - \psi_m \, , \psi_k - \psi_m)\!) \longrightarrow 0$$

quand $k, m \to +\infty$. Ainsi $\{\rho\psi_k\}$ est une suite de Cauchy dans $W^1_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et a pour limite $\rho\psi$ ./.

Nous somme finalement prêts pour démontrer le théorème de régularité intérieure. La démonstration est fondée comme dans KOHN et FOLLAND[14] sur la technique des opérateurs de différence finie dûe à NIRENBERG[17].

Nous supposons, comme précédemment, que U est un ouvert de coordonnées (dans M') strictement contenu dans M, au-dessus duquel le fibré holomorphe en droites complexes F est trivial ;de plus , nous supposerons que $x_1,\ldots,x_{2n}$ sont les fonctions coordonnées sur U.
Définissons les opérateurs Δ_h^k sur les fonctions par (2.4.1)

$$\Delta_h^k u(x) = \frac{1}{2ih} [\, u(x_1,\ldots,x_{k-1}, x_k+h, x_{k+1},\ldots, x_{2n}) - u(x_1,\ldots,x_{k-1}, x_k-h, x_{k+1},\ldots x_{2n}) \,]$$

Alors Δ_h^k est défini sur les formes par son action sur les composantes ; soit, plus précisément, si dans l'ouvert de coordonnées U au-dessus duquel F est trivial, $\psi \in C^\infty_{(p,q)}(M,F)$ s'exprime par

$$\psi = \sum \psi_{A\overline{B}} \, dZ^A \wedge d\overline{Z}^B ,$$

$$\Delta_h^k \psi = \sum (\Delta_h^k \psi_{A\overline{B}}) \, dZ^A \wedge d\overline{Z}^B . \tag{3.2.94}$$

De plus, si β est un multi-indice et

$$H = (h_{11},\ldots , h_{1\,\beta_1} , \ldots, h_{n\,1},\ldots, h_{n\beta\,n}) ,$$

nous poserons (2.4.2)

$$\Delta_H^\beta = \Pi_{k=1} \; \Pi_{\ell=1}^{\beta_\ell} \; \Delta^k_{h_{k\ell}}$$

Nous avons alors le lemme suivant prouvé dans le chapitre II (proposition (2.4.3)).

(3.2.95) Lemme : Soient ψ , $\varphi \in C^{\infty}_{(p,q)}(M,F)$ à support dans un compact fixe strictement contenu dans M . Soit D un opérateur différentiel du premier ordre et $|\beta| = s$. Alors :

(1) Si $\psi \in W^{s}_{(p,q)}(M,F)$, $\| \Delta^{\beta} \psi \| \lesssim \| \psi \|_{s}$ uniformément quand $H \to 0$ (comme vecteur dans $\mathbb{R}^{s}$)

(2) Si $\psi \in W^{s}_{(p,q)}(M,F)$, $\| [D, \Delta^{\beta}_{H}] \psi \| \lesssim \| \psi \|_{s}$ uniformément quand $H \to 0$.

(3) Si $\psi \in W^{s-1}_{(p,q)}(M,F)$, $(\Delta^{\beta}_{H} \psi, \varphi) = (\psi, \Delta^{\beta}_{H} \varphi) + \mathcal{O}(\| \psi \|_{s-1} \| \varphi \|)$ uniformément quand $H \to 0$.

(4) Si $\psi \in W^{s-1}_{(p,q)}(M,F)$ et $\varphi \in W^{1}_{(p,q)}(M,F)$,

$$| (\psi, [\Delta^{\beta}_{H}, D] \varphi) | \lesssim \| \psi \|_{s-1} \| \varphi \|_{1}$$

uniformément quand $H \to 0$.

(5) Si $\psi \in W^{t}_{(p,q)}(M,F)$ et $\| \Delta^{\beta}_{H} \psi \|_{t}$ est bornée quand $H \to 0$, alors $D^{\beta} \psi \in W^{t}_{(p,q)}(M,F)$ ./.

(3.2.96) Théorème : Soient U, V deux régions avec $V \subset \bar{V} \subset U \subset \bar{U} \subset M$, et soit ρ_1 une fonction C^{∞} à valeurs réelles et à support dans U avec $\rho_1 = 1$ sur V. Si $\psi \in$ Dom (Λ) et si $\rho_1 \Lambda \psi \in W^{s}_{(p,q)}(\bar{M},F)$ pour un $s \in \mathbb{Z}^{+}$, alors $\rho\psi \in W^{s+2}_{(p,q)}(\bar{M},F)$ pour toute fonction $\rho \in C^{\infty}_{o}(V)$, $1 \leq q \leq n$.

Démonstration : On sait , en vertu du lemme (3.2.93), que $\rho' \psi \in W^{1}_{(p,q)}(\bar{M},F)$ pour tout ρ' à support dans V. Ainsi, d'après le (5) du lemme (3.2.95) , pour démontrer le théorème pour $s = 0$, il suffit de montrer que $\| \Delta^{\beta} \rho\psi \|^{2}_{1}$ est bornée quand $H \to 0$ pour $|\beta| = 1$.

Par récurrence, si le théorème est vrai pour s-1 et $\rho_1 \Lambda \psi \in W^s_{(p,q)}(\bar{M},F) \subset W^{s-1}_{(p,q)}(\bar{M},F)$,

alors $\rho' \psi \in W^{s+1}_{(p,q)}(\bar{M},F)$, $\forall \rho'$ à support dans V et il suffit de montrer que $\| \Delta_H^\beta \rho\psi \|^2_1$ est bornée quand $H \to 0$ pour $|\beta| = s+1$. D'après le théorème (3.2.74) , nous sommes conduits à prouver que , pour tout $s \geq 1$, si $\rho'\psi \in W^s_{(pq)}(\bar{M},F)$ pour tout ρ' à support dans V et $\rho_1 \Lambda \psi \in W^{s-1}_{(p,q)}(M,F)$, alors $((\Delta_H^\beta \rho\psi, \Delta_H^\beta \rho\psi))$ est bornée quand $H \to 0$, pour $|\beta| = s$. D'après (1) - (4) du lemme (3.2.95) , on a

$$(\bar\partial \Delta_H^\beta \rho\Psi, \bar\partial \Delta_H^\beta \rho\Psi) = (\Delta_H^\beta \bar\partial \rho\Psi, \bar\partial \Delta_H^\beta \rho\Psi) + O\left(\|\rho\Psi\|_0 \| \Delta_H^\beta \rho\Psi\|_1\right)$$

$$= \left(\Delta_H^\beta \rho \bar\partial \Psi, \bar\partial \Delta_H^\beta \rho\Psi\right) + O\left(\|\rho'\Psi\|_0 \|\Delta_H^\beta \rho\Psi\|_1\right)$$

$$= \left(\rho \bar\partial \Psi, \Delta_H^\beta \bar\partial \Delta_H^\beta \rho\Psi\right) + O\left(\|\rho'\Psi\|_0 \|\Delta_H^\beta \rho\Psi\|_1\right)$$

$$= \left(\bar\partial \Psi, \bar\partial \rho \Delta_H^\beta \Delta_H^\beta \rho\Psi\right) + O\left(\|\rho'\Psi\|_0 \|\Delta_H^\beta \rho\Psi\|_1\right)$$

$$+ \left(\bar\partial \Psi, [\rho, \bar\partial] \Delta_H^\beta \Delta_H^\beta \rho\Psi\right)$$

Nous avons utilisé le fait que

$$\| \rho\, \bar\partial\psi \|^2_{s-1} \lesssim \| \bar\partial\, \rho\psi \|^2_{s-1} + \| \rho'\psi \|^2_{s-1} \lesssim \| \rho'\psi \|^2_s$$

Maintenant, $[\rho , \bar\partial]$ étant une matrice de fonctions, on a

$$(\bar\partial\psi, [\rho, \bar\partial]\Delta_H^\beta \Delta_H^\beta \rho\psi) = (\Delta_{H'}^{\beta'}, \rho'\bar\partial\psi, \Delta_h^k \Delta_H^\beta \rho\psi)$$

$$+ \mathcal{O}\left(\|\rho'\bar\partial\psi\|_{p-2} \|\Delta_h^k \Delta_H^\beta \rho\psi\|\right)$$

$$= \mathcal{O}\left(\|\rho'\psi\|_p \|\Delta_H^\beta \rho\psi\|_1\right),$$

où $\Delta_{H'}^{\beta'}$ est défini par : $\Delta_{H'}^{\beta'} \Delta_h^k = \Delta_H^\beta$ pour un k, h.
Après avoir effectué les mêmes calculs pour $(\vartheta_a \Delta_H^\beta \rho\psi, \vartheta_a \Delta_H^\beta \rho\psi)$, on a

$$\left(\!\left(\Delta_H^\beta \rho\psi, \Delta_H^\beta \rho\psi\right)\!\right) = \left(\!\left(\psi, \rho \Delta_H^\beta \Delta_H^\beta \rho\psi\right)\!\right) + \mathcal{O}\left(\|\rho'\psi\|_p \|\Delta_H^\beta \rho\psi\|_1\right)$$

$$= \left(\Lambda\psi, \rho \Delta_H^\beta \Delta_H^\beta \rho\psi\right) + \mathcal{O}\left(\|\rho'\psi\|_p \|\Delta_H^\beta \rho\psi\|_1\right)$$

$$= \left(\Delta_{H'}^{\beta'}, \rho\rho_1 \Lambda\psi, \Delta_h^k \Delta_H^\beta \rho\psi\right) + \mathcal{O}\left(\|\rho'\psi\|_p \|\Delta_H^\beta \rho\psi\|_1\right.$$

$$\left. + \|\rho_1 \Lambda\psi\|_{p-2} \|\Delta_h^k \Delta_H^\beta \rho\psi\|\right)$$

$$= \mathcal{O}\left(\|\rho_1 \Lambda\psi\|_{p-1} \|\Delta_H^\beta \rho\psi\|_1 + \|\rho'\psi\|_p \|\Delta_H^\beta \rho\psi\|_1\right)$$

$$\leq K \|\rho_1 \Lambda\psi\|_{p-1}^2 + K' \|\rho'\psi\|_p^2 + \varepsilon \|\Delta_H^\beta \rho\psi\|_1^2 ,$$

en vertu de (2.1.7).

Comme cette estimation est vraie uniformément quand $H \to 0$, le théorème s'en trouve ainsi démontré.
Une conséquence immédiate du théorème (3.2.96) ci-dessus et du lemme de Sobolev (Lemme (2.2.6)) est le

(3.2.97) Corollaire : Si $\psi \in$ Dom (Λ) et $\rho_1 \Lambda \psi \in C^{\infty}_{o(p,q)}(M,F)$, alors $\rho\psi \in C^{\infty}_{o(p,q)}(M,F)$, $1 \leqslant q \leqslant n$.

b) Régularité et estimation au bord.

Soit $\theta^1,\ldots, \theta^n$ une carte spéciale sur M' relativement à bM au-dessus de laquelle le fibré F est trivial. Définissons les opérateurs

$$(3.2.98) \qquad D_t^k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_k} \quad ; \quad D_r = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial r} \quad ; \quad \Delta_\ell^k = \Delta_\ell^{t_k}$$

$$\text{et} \quad \Delta_H^\beta = \prod_{k=1}^{n} \prod_{\ell=1}^{\beta_k} \Delta_{h_{k\ell}}^{t_k}$$

Ces opérateurs agissent sur les composantes des formes par rapport à la base $\theta^1,\ldots, \theta^n$.
Nous avons alors le

(3.2.99) Lemme : D_t^β et Δ_H^β préservent $\mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et Δ_H^β préserve $\tilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F)$ ./.

Démonstration

La première assertion découle du corollaire (3.2.21) puisque D_t^β et Δ_H^β sont des opérateurs tangentiels le long de bM . De plus, si $\{\psi_m\}$ est une suite dans $\mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ qui converge vers $\psi \in \tilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F)$ par rapport à la norme $((\ , \ ))^{1/2}$, alors la limite $\Delta_H^\beta \psi$ de $\Delta_H^\beta \psi_m$ dans la norme $((\ , \ ))^{1/2}$ appartient à $\tilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F)$ puisque $\Delta_H^\beta \psi_m \in \mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et que les translations sont continues par rapport à la norme $((\ , \ ))^{1/2}$.

C.Q.F.D.

Il est clair, d'après le corollaire (3.2.21) , que la multiplication par des fonctions C^∞ préserve $\mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et $\tilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F)$.
Ces faits étant rappelés, nous allons maintenant procéder à la démonstration notre théorème de régularité sur le bord.

(3.2.100) Théorème : Soit U une carte spéciale sur M' relativement à bM, $V \subset \overline{V} \subset U$, au-dessus de laquelle le fibré holomorphe en droites complexes F est trivial. Soit ρ_1 une fonction C^∞ à valeurs réelles et à support dans U avec $\rho_1 = 1$ sur $\overline{V}$.
Si $\psi \in \mathrm{Dom}(\Lambda)$ et $\rho_1 \Lambda \psi \in C^\infty_{(p,q)}(\overline{M},F)$, alors $\rho\psi \in C^\infty_{(p,q)}(\overline{M},F)$ pour toute fonction C^∞ ρ à valeurs réelles et à support dans V, $1 \leqslant q \leqslant n$ ./.

Démonstration :

Il est clair que $\rho\psi \in W^1_{(p,q)}(\overline{M},F)$ d'après le lemme (3.2.93).
En procédant par récurrence , supposons que $\rho\psi \in W^s_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et montrons que $\rho\psi \in W^{s+1}_{(p,q)}(\overline{M},F)$; le théorème s'en suivra en vertu du lemme de Sobolev (lemme (2.2.6)).
Supposons alors que $\rho\psi \in W^s_{(p,q)}(\overline{M},F)$. Le lemme (3.2.95) est encore vrai au bord (voir proposition (2.4.3.)) et, par suite, par une preuve analogue à celle du théorème (3.2.96) on déduit que $D_t^\beta \rho\psi \in W^1_{(p,q)}(\overline{M},F)$ pour $|\beta| = s$.
Il reste à montrer que $D_t^\beta D_r^m \rho\psi$ (ou, ce qui revient au même, $\rho D_t^\beta D_r^m \psi$) est dans $W^o_{(p,q)}(\overline{M},F)$ pour $|\beta| + m = s+1$ et $m \geqslant 2$.
Nous allons comme KOHN et FOLLAND (14 ; p.34) , utiliser le fait que Λ est elliptique , si bien que

$$\Lambda\psi = A_o D_r^2 \psi + \sum_{k=1}^{2n-1} A_k D_t^k D_r \psi + \sum_{k,\ell=1}^{2n-1} A_{k\ell} D_t^k D_t^\ell \psi$$

$$+ B_o D_r \psi + \sum_{k=1}^{2n-1} B_k D_t^k \psi + C\psi ,$$

où les A, B, C sont des matrices C^∞ et les A sont inversibles . Ainsi

(3.2.101)

$$\rho D_r^2 \psi = \rho A_o^{-1} \Big[\rho_1 \Lambda\psi - \sum_{k=1}^{2n-1} A_k D_t^k D_r \psi - \sum_{k,\ell=1}^{2n-1} A_{k\ell} D_t^k D_t^\ell \psi$$

$$- B_o D_r \psi - \sum_{k=1}^{2n-1} B_k D_t^k \psi - C\psi \Big]$$

Par application à (3.2.101) de $\rho\, D_t^{\beta}$ ($|\beta| = s-1$), on voit que $\rho\, D_t^{\beta}\, D_r^{2}\psi$ s'exprime en termes des dérivées de $\rho_1 \Lambda \psi$ et des dérivées de $\rho\psi$ qui, elles, appartiennent déjà à $W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F)$.
En procédant par récurrence sur m, par application de $\rho\, D_t^{\beta}\, D_r^{m-2}$ ($|\beta|+m = s+1$ à (3.2.101), on trouve que $\rho\, D_t^{\beta}\, D_r^{m}\,\psi$ s'exprime en termes des dérivées de $\rho_1 \Lambda \psi$ et des dérivées de $\rho\psi$ d'ordre $\leq$ s+1 et d'ordre $\leq$ m-1 par rapport à r.
Ainsi, on a finalement :

$$D_t^{\beta}\, D_r^{m}\, \rho\psi \in W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F) ,$$

pour tout $|\beta| + m = s+1$; il s'en suit que $\rho\psi \in W^{s+1}_{(p,q)}(\overline{M},F)$.

(3.2.102) Théorème : Soit U une carte spéciale sur M' relativement à bM, $V \subset \overline{V} \subset U$, au-dessus de laquelle le fibré holomorphe en droites complexes F est trivial. Soit ρ_1 une fonction C^{∞} à valeurs réelles et à support dans U avec $\rho_1 = 1$ sur $\overline{V}$.
Si $\psi \in \mathrm{Dom}(\Lambda)$ et $\rho_1 \Lambda \psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ alors

$$\|\rho\psi\|^2_{s+1} \lesssim \|\rho_1 \Lambda \psi\|^2_{s} + \|\psi\|^2 , \quad 1 \leq q \leq n ,$$

pour tout ρ C^{∞} à valeurs réelles et à support dans V ./.

Démonstration : Les dérivées tangentielles sont estimées par la même méthode que celle du théorème (3.2.87) en utilisant le lemme (3.2.99) . On utilise ensuite (3.2.101) pour estimer les dérivées normales car, d'après la démonstration du théorème (3.2.100) précédent , $\rho\, D_t^{\beta}\, D_r^{m}\,\psi$ ($|\beta| + m = s+1$) s'exprim en termes des dérivées de $\rho_1 \Lambda \psi$ d'ordre s-1 et des dérivées de $\rho\psi$ qui, elle ont déjà été estimées ./.

c) Théorème principal.

Nous allons maintenant réunir les principaux résultats de (a),(b) en un seul théorème appelé "theorème principal" selon la terminologie de KOHN et FOLLAND[14].

Etant donné $\psi \in W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leq q \leq n$, soit $\varphi \in \widetilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F)$ la solution unique de $\Lambda\varphi = \psi$ (voir théorème (3.2.77) . Soit U une région de M', $U \cap M \neq \emptyset$; supposons que $\psi|U \in C^{\infty}_{(p,q)}(U\cap\overline{M},F)$. Si $U \cap bM = \emptyset$, d'après le corollaire (3.2.97) $\psi|U \in C^{\infty}_{(p,q)}(U,F)$ et en vertu du théorème (3.2.87) , on a

$$\| \rho\varphi\|^{2}_{s+2} \lesssim \| \rho_1\psi\|^{2}_{s} + \|\psi\|^{2} \quad , \text{ puisque } \|\varphi\| \leq \|\psi\| .$$

Si $U \cap bM \neq \emptyset$, alors d'après le théorème (3.2.100), $\varphi \in C^{\infty}_{(p,q)}(U \cap \overline{M},F)$ et d'après le théorème (3.2.102), on a :

$$\| \rho\varphi \|^{2}_{s+1} \lesssim \| \rho_1\Psi \|^{2}_{s} + \| \psi \|^{2} .$$

Ainsi, nous pouvons énoncer le

(3.2.103) Théorème principal : Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n, à bord bM de classe C^{∞} pseudo-convexe.

Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Supposons que la classe caractérisitque $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma = (i/2\pi)\, X_{\alpha\overline{\beta}}\, dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta}$ "suffisamment définie positive".

Etant donné $\psi \in W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leq q \leq n$, soit $\varphi \in \widetilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F)$ l'unique solution de $\Lambda\varphi = \psi$. Alors si U est une région de $\overline{M}$ et $\psi|U \in C^{\infty}_{(p,q)}(U,F)$, $\varphi \in C^{\infty}_{(p,q)}(U,F)$. De plus, dans ce cas, si ρ et ρ_1 sont des fonctions C^{∞} à valeurs réelles avec $\operatorname{supp}\rho \subset \operatorname{supp}\rho_1 \subset U$ et $\rho_1 = 1$ sur $\operatorname{supp}\rho$, alors :

(1) Si $U \cap bM = \emptyset$, pour tout $s \in \mathbb{Z}^{+}$, il existe une constante C_s (qui dépend de ρ et ρ_1 mais qui est indépendante de ψ) telle que

$$\| \rho\varphi \|^{2}_{s+2} \leq C_s \left(\| \rho_1\psi \|^{2}_{s} + \| \psi \|^{2}\right) ;$$

(2) Si $U \cap bM \neq \emptyset$, pour tout $s \in \mathbb{Z}^{+}$ il existe une constante C_s (qui dépend de ρ et ρ_1 mais qui est indépendante de ψ) telle que

$$\| \rho\varphi \|^{2}_{s+1} \leq C_s \left(\| \rho_1\psi \|^{2}_{s} + \| \psi \|^{2} \right) ./.$$

5 - THEOREMES D'EXISTENCE ET DE REGULARITE POUR LE $\overline{\partial}$ - PROBLEME DE NEUMANN.

Nous allons enfin pouvoir, en interprétant le théorème principal (3.2.103) établir des théorèmes d'existence et de régularité pour le $\overline{\partial}$ - problème de Neumann.

Nous commencerons par dégager quelques propriétés supplémentaires concernant l'opérateur Λ .

(3.2.104) Proposition . Soient ψ , φ , U , ρ_1,ρ comme dans le théorème principal.

Si $\psi|_U \in W^s_{(p,q)}(U,F)$, alors $\rho\varphi \in W^{s+2}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et

$$\| \rho\varphi\|^2_{s+k} \lesssim \| \rho_1\psi\|^2_s + \|\psi\|^2 \quad , 1 \leqslant q \leqslant n, \quad \text{avec } k = 2 \text{ ou } 1.$$

selon que $U \cap bM = \phi$, soit $U \cap bM \neq \phi$.

Démonstration

Soit ρ_o une fonction C^∞ à support dans U avec $\rho_o = 1$ sur supp ρ_1. Soient $\{\beta_n\}$ et $\{\lambda_n\}$ deux suites de formes C^∞ à coefficients dans F avec :

$$\text{supp } \beta_n \subset \text{supp } \rho_o \; ; \quad \text{supp } \lambda_n \subset \text{supp}(1-\rho_o) \; ;$$

$$\beta_n \longrightarrow \rho_o\psi \text{ dans } W^s_{(p,q)}(\overline{M},F) \text{ et } \lambda_n \longrightarrow (1-\rho_o)\psi \text{ dans } W^o_{(p,q)}(\overline{M},F).$$

Alors $\psi_n = \beta_n + \lambda_n \to \psi$ dans $W^o_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et

$$\rho_1\psi_n \to \rho_1\psi \quad \text{dans } W^s_{(p,q)}(\overline{M},F) \; .$$

Posons $\varphi_n = \Lambda^{-1}\psi_n$; puisque Λ^{-1} est borné, $\varphi_n \to \varphi$ dans $W^o_{(p,q)}(\overline{M},F$
En vertu du théorème principal (3.2.103) , on a :

$$\| \rho\,(\varphi_n - \varphi_m)\|^2_{s+2} \lesssim \| \rho_1\,(\psi_n-\psi_m)\|^2_s + \|\psi_n - \psi_m\|^2 \; ;$$

d'où l'on déduit que

$$\rho\varphi = \lim \rho\varphi_n \text{ est dans } W^{s+2}_{(p,q)}(\overline{M},F) \text{ et}$$

$$\| \rho\varphi \|^2_{s+2} \lesssim \| \rho_1\psi \|^2_s + \| \psi \|^2$$

(3.2.105) Proposition: Avec U, ρ_1, ρ, ψ comme dans la proposition (3.2.104) supposons que $\rho_1 \psi \in W^s_{(p,q)}(\overline{M},F)$ pour un $s > 0$. Si, pour une constante λ, φ vérifie

$$(\Lambda - \lambda)\,\varphi = \psi,$$

alors $\rho\varphi \in W^{s+k}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leq q \leq n$. avec k comme dans (3.2.104).

Démonstration : Supposons que $k = 1$; même preuve pour $k = 2$.
Posons $\psi' = \psi + \lambda\varphi$; d'où

$$\Lambda\varphi = \psi'.$$

Alors, puisque $\psi' \in W^0_{(p,q)}(\overline{M},F)$, on a $\rho_1 \varphi \in W^1_{(p,q)}(\overline{M},F)$ d'après la proposition (3.2.104) . Soit $\{\rho_k\}_2^s$ une suite de fonctions C^∞ avec $\rho_s = \rho$ et $\rho_k = 1$ sur supp ρ_{k+1}. Alors, en vertu de la proposition (3.2.104), par récurrence, on a :

$$\rho_1 \psi' \in W^1_{(p,q)}(\overline{M},F) \Rightarrow \rho_2 \varphi \in W^2_{(p,q)}(\overline{M},F) \Longrightarrow$$

$$\rho_2 \psi' \in W^2_{(p,q)}(\overline{M},F) \Rightarrow \rho_3 \varphi \in W^3_{(p,q)}(\overline{M},F) \quad \text{etc...}$$

C.Q.F.D.

Par application du lemme de Sobolev (Lemme (2.2.6)) à la proposition (3.2.105) nous avons le

(3.2.106) Corollaire : Si $\psi\,|_U \in C^\infty_{(p,q)}(U \cap \overline{M}, F)$, alors $\varphi\,|_U \in C^\infty_{(p,q)}(U \cap \overline{M}, F)$, $1 \leq q \leq n$.

En d'autres termes $\Lambda - \lambda$ est hypo-elliptique ./.

De même, en faisant $U = \overline{M}$ dans le théorème principal (3.2.103) et compte tenu du fait que

$$\| \psi \| \leq \| \psi \|_s ,$$

on a la

(3.2.107) Proposition : Si $\Lambda \varphi = \psi$ et $\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ alors $\varphi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et $\| \varphi \|^2_{s+1} \lesssim \| \psi \|^2_s$ pour tout $s \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq q \leq n$./.

De la proposition (3.2.107), par approximation de ψ par des formes C^{∞} à coefficients dans F, il vient le

(3.2.108) Corollaire : Si $\Lambda \varphi = \psi$ et $\psi \in W^s_{(p,q)}(\overline{M},F)$, alors

$$\varphi \in W^{s+1}_{(p,q)}(\overline{M},F) \quad \text{et}$$

$$\| \varphi \|^2_{s+1} \lesssim \| \psi \|^2_s \quad , \ 1 \leq q \leq n./.$$

Il résulte du corollaire (3.2.108) que

$$\Lambda^{-1} : W^0_{p,q}(\overline{M},F) \longrightarrow W^1_{(p,q)}(\overline{M},F) \ , \ 1 \leq q \leq n,$$

est borné . Il découle du lemme de Rellich (Lemme (2.2.6)) le

(3.2.109) Corollaire : Λ^{-1} est un opérateur compact (complètement continu) , $1 \leq q \leq n$./.

Par application de la théorie des opérateurs compacts (voir (19 ; p.231)) au corollaire (3.2.109) on a :

(3.2.110) Corollaire : L'opérateur Λ possède un spectre discret sans aucun point limite fini, et chaque valeur propre est de multiplicité finie , $1 \leq q \leq n$.

(3.2.111) Corollaire : La norme $((\ , \ ))^{1/2}$ est complètement continue par rapport à la norme $\| \ \|$ sur $\widetilde{\mathcal{D}}_{p,q}(M,F)$, $1 \leq q \leq n$; c'est-à-dire que toute suite dans $\widetilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F)$ bornée dans la norme $((\ , \ ))^{1/2}$, possède une sous-suite convergente dans $W^0_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leq q \leq n$ ./.

Démonstration

Puisque Λ est un opérateur auto-adjoint positif , il possède une racine carrée $\Lambda^{1/2}$ et si $\psi \in$ Dom (Λ) ,

$$((\psi,\psi)) = (\Lambda \psi, \psi) = (\Lambda^{1/2} \psi, \Lambda^{1/2} \psi).$$

Ainsi, puisque Dom (Λ) est dense dans $\tilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F)$, on a :

$$\tilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F) \subset \text{Dom}\,(\Lambda^{1/2})$$

et

$$((\psi,\psi)) = (\Lambda^{1/2}\psi\ ,\ \Lambda^{1/2}\psi\ ) \text{ pour tout } \psi \in \tilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F).$$

Mais en vertu du corollaire (3.2.109), $\Lambda^{-1/2} = (\Lambda^{1/2})^{-1}$ est compact, $1 \leq q \leq n$, (c'est la limite de normes d'opérateurs de rang fini);ceci prouve notre assertion ./.

(3.2.112) Corollaire : Les formes propres de Λ sont toutes de classe C^∞ ($1 \leq q \leq n$)

Démonstration.
Si ψ est une (p,q)-forme , $1 \leq q \leq n$, qui correspond à la valeur propre λ alors $(\Lambda - \lambda)\psi = 0$. Le corollaire s'en suit par application du corollaire (3.2.106) avec U = $\overline{M}$ ./.

Il est temps maintenant de montrer , comme il a été annoncé à la fin du 1) de ce paragraphe II (Chap.III), que les opérateurs L + I et Λ coïncident pour $1 \leq q \leq n$.
Il résulte des propositions (3.2.11) et (3.2.29), ainsi que de la définition de $\mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ (3.2.22) que :

$$\text{Dom}\,(L + I) \cap C^\infty_{(p,q)}(\overline{M},F) = \text{Dom}\,(\Lambda) \cap C^\infty_{(p,q)}(\overline{M},F)$$
$$= \mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)\ .$$

Ainsi $\Lambda = L + I$ sur $\mathcal{D}_{(p,q)}(\overline{M},F)$.

Soit $\psi \in \text{Dom}(\Lambda)$, $1 \leq q \leq n$, avec $\Lambda\psi = \psi$. Choisissons une suite $\{\psi_k\} \subset C^\infty_{(p,q)}(\overline{M},F)$ qui converge vers ψ dans $W^o_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leq q \leq n$;
Posons

$$\varphi_k = \Lambda^{-1}\psi_k$$

Alors $\varphi_k \to \varphi$ dans $W^0_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et, en vertu de la proposition (3.2.107) $\varphi_k \in C^\infty_{(p,q)}(\overline{M},F)$. Il en résulte que

$$\Lambda \varphi_k = (L+I)\varphi_k \longrightarrow \psi ;$$

d'où puisque $L + I$ est un opérateur clos, $\varphi \in \mathrm{Dom}\,(L + I)$, $1 \leq q \leq n$, et $(L + I)\varphi = \psi$. Ainsi, $L + I$ est une extension de Λ, et puisque Λ et $L+I$ sont auto-adjoints, nécéssairement on a

$$\Lambda = L + I$$

Nous pouvons donc énoncer la

(3.2.113) Proposition : $\Lambda = L + I$ $(1 \leq q \leq n)$.

Ceci étant, revenons maintenant à l'étude de $\overline{\partial}$, ϑ_a et $\Box_a$.

(3.2.114) Proposition : $W^0_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leq q \leq n$, possède pour l'opérateur L une base orthonormale complète de formes propres qui sont C^∞ jusqu'à bM. Les valeurs propres de L sont non négatives, sans aucun point limite fini et de multiplicité finie.
De plus, pour tout $s \in \mathbb{Z}^+$, on a :

$$\|\psi\|^2_{s+1} \lesssim \|\Box_a \psi\|^2_s + \|\psi\|^2$$

uniformément pour $\psi \in \mathrm{Dom}\,(\Lambda) \cap C^\infty_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leq q \leq n$.
(Les estimations locales correspondantes sont évidemment vraies).

Démonstration
La première assertion découle des corollaires (3.2.110) (3.2.112). L'estimation découle de la proposition (3.2.107) par récurrence sur s, puisque

$$\|\psi\|_1^2 \lesssim \|\Lambda\psi\|^2 \leq \|\Box_a\psi\|^2 + \|\psi\|^2 ,$$

$$\|\psi\|_2^2 \lesssim \|\Lambda\psi\|_1^2 \leq \|\Box_a\psi\|_1^2 + \|\psi\|_1^2 \leq \|\Box_a\psi\|_1^2 + \|\Box_a\psi\|^2 + \|\psi\|^2$$

$$\leq \| \Box_a \psi \|_1^2 + \| \psi \|^2 ,$$

et ainsi de suite

C.Q.F.D.

D'après la proposition (3.2.114) , l'espace des formes harmoniques , $\mathcal{H}_{(p,q)}(M,F) = \mathrm{Ker}\ (L)$, $1 \leq q \leq n$, est un sous-espace de $C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ de dimension finie.

De plus, en vertu du corollaire (3.2.111) et du théorème (3.1.22), $L\ (\mathcal{D}^{L}_{(p,q)}(M,F)$, $1 \leq q \leq n$, est fermée.

Comme L est auto-adjoint, on a la

(3.2.115) Proposition : $W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leq q \leq n$, admet la décomposition orthogonale forte :

$$W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F) = L\left(\mathcal{D}^{L}_{(p,q)}(M,F)\right) \oplus \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$$

$$= \overline{\partial} \mathcal{D}_a \, \mathrm{Dom}(L+I) \oplus \mathcal{D}_a \overline{\partial} \, \mathrm{Dom}(L+I) \oplus \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$$

Démonstration

La première égalité provient du fait que

$$L\left(\mathcal{D}^{L}_{(p,q)}(M,F)\right) = \left(\mathrm{Ker}(L)\right)^{\perp} = \left(\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)\right)^{\perp}$$

et la seconde du fait que $T^2 = 0$ et , par suite, on a

$$\mathrm{Im}(T) \perp \mathrm{Im}(T_a^{*}) ,$$

où $\mathrm{Im}(T)$ et $\mathrm{Im}(T_a^{*})$ désignent les images respectives de T et T_a^{*} ./.

Soit Dom (T), le domaine de définition de l'opérateur T, alors, on a le

(3.2.116) Corollaire : L'image de T sur Dom (T) $\cap$ $W^{o}_{(p,q-1)}(\overline{M},F)$ est fermée $(1 \leq q \leq n)$ ./.

Démonstration.

Puisque Im (T) $\perp$ Ker(T^{*}_{a}) , on a

$$\mathrm{Im}(T) = \overline{\partial}\, \mathcal{D}_{a}\ \mathrm{Dom}\ (\Lambda) \quad ./.$$

Soit H l'opérateur de projection orthogonale de $W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ sur $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$ (3.1.9).

Nous définissons l'opérateur de Neumann

$$N : W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F) \longrightarrow \mathrm{Dom}\ (\Lambda)$$

comme suit :

(1) si $\psi \in \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$, $N\psi = 0$;

(2) Si $\psi \in \mathrm{Im}\ (L)$, $N\psi = \Phi$, où Φ est l'unique solution de $L\Phi = \psi$, avec $\Phi \perp \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$, et on prolonge par linéarité. En d'autres termes, $N\psi$ est l'unique solution Φ des équations

$$H\Phi = 0, \quad L\Phi = \psi - H\psi.$$

(Il est à noter que l'opérateur N est défini dès que Im(L) est fermée, que l'estimation soit vraie ou pas). Nous avons alors le théorème suivant, qui est la solution du $\overline{\partial}$ - problème de Neumann dans le sens habituel [12] :

(3.2.117) Théorème : Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte , relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n, à bord bM de classe C^{∞} pseudo-convexe. Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'

Supposons que la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)- forme réelle d-fermée

$$\gamma = (i/2\pi)\ X_{\alpha\bar{\beta}}\ dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}$$

"suffisamment définie positive".

Alors il existe un opérateur

$$N : W^{o}_{(p,q)}(\bar{M},F) \longrightarrow W^{o}_{(p,q)}(\bar{M},F), \quad 1 \leq q \leq n ,$$

tel que :

(1) N est un opérateur compact.

(2) $\forall\, \psi \in W^{o}_{(p,q)}(\bar{M},F)$, $\psi = \bar{\partial}\, \vartheta_a\, N\psi + \vartheta_a\, \bar{\partial}\, N\psi + H\psi$

(3) $NH = HN = 0$, $N\Box_a = \Box_a N = I - H$ sur $Dom(L+I)$;

$N\bar{\partial} = \bar{\partial}\, N$ sur $Dom\,(T)$;

(et si N est défini sur $W^{o}_{(p,q-1)}(\bar{M},F)$, alors $N\vartheta_a = \vartheta_a N$ sur $Dom(T_a^{*})$).

(4) $N\left(C^{\infty}_{(p,q)}(\bar{M},F)\right) \subset C^{\infty}_{(p,q)}(\bar{M},F)$ et pour tout $s \in \mathbb{Z}^{+}$, on a

$$\|N\psi\|_{s+1} \lesssim \|\psi\|_{s} \quad , \quad \forall\, \psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\bar{M},F) \ , \ 1 \leq q \leq n \ ./.$$

Démonstration

(1) découle de la proposition (3.2.114)

(2) est une reformulation de la proposition (3.2.115)

Pour le (3) , il est immédiat, d'après la définition de N, que .

$NH = HN = 0$ et $N\Box_a = \Box_a N = I - H$ sur $Dom(L+I)$. De plus si $\psi \in Dom(T)$ N étant défini sur $W^{o}_{p,q+1}(\bar{M},F)$ (car $q+1 > 1$, par suite $Im(L)$ est fermée), on a d'après (2) et la première assertion de (3)

$$N\,\bar{\partial}\,\psi = N\ \bar{\partial}\ \vartheta_a\ \bar{\partial} N\,\psi = N\Box_a\ \bar{\partial}\, N\,\psi = (I-H)\ \bar{\partial}\, N\,\psi = \bar{\partial}\, N\,\psi$$

puisque $\bar{\partial}^{2} = 0$ et $H\bar{\partial} = 0$

Le même raisonnement s'applique pour $\Box_a$. Finalement, la première assertion de (4) découle du corollaire (3.2.111) puisque quand ψ est C^∞; alors $\psi - H\psi$ l'est également ; la seconde assertion de (4) découle de la proposition (3.2.114) et de (3). Plus précisément :

$$\| N\psi \|^2_{s+1} \lesssim \| \Box_a N\psi \|^2_s + \| N\psi \|^2 \lesssim \| \psi \|^2_s + \| H\psi \|^2_s + \| N\psi \|^2$$

$$\lesssim \| \psi \|^2_s + \| \psi \|^2 + \| N\psi \|^2$$

$$\lesssim \| \psi \|^2_s$$

(toutes les s-normes sur l'espace de dimension finie $\mathcal{H}_{(p,q)}(M,F)$ $1 \leq q \leq n$ étant équivalentes). C.Q.F.D.

Une première application du théorème (3.2.117) ci-dessus est la solution de l'équation inhomogène de Cauchy-Riemann

$$\bar\partial \varphi = \psi$$

Remarquons d'abord qu'il n'y a aucun espoir de résoudre ce problème à moins que $\psi \perp \mathrm{Ker}\,(T_a^*)$; ce qui est équivalent à

$$\bar\partial \psi = 0 \quad \text{et} \quad H\psi = 0.$$

Sous les hypothèses du théorème (3.2.117) , nous avons la

(3.2.118) Proposition : Supposons que $\psi \in W^0_{(p,q)}(\bar M,F)$, $1 \leq q \leq n$, $\bar\partial\psi = 0$ et $H\psi = 0$.

Alors, il existe une solution unique φ de $\bar\partial\varphi = \psi$ avec $\varphi \perp \mathrm{Ker}(\bar\partial)$. De plus, si $\psi \in C^\infty_{(p,q)}(\bar M,F)$ alors $\varphi \in C^\infty_{(p,q-1)}(\bar M,F)$ et

$$\| \varphi \|_s \lesssim \| \psi \|_s \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{Z}^+ \quad ./.$$

Démonstration

En vertu du théorème (3.2.117) et des conditions sur ψ , on a :

$$\psi = \bar{\partial} \, \mathcal{N}_a \, N \psi \ .$$

Ainsi, on peut prendre $\varphi = \mathcal{N}_a \, N \psi$ et il est clair que la condition $\varphi \perp \mathrm{Ker}\,(T)$ implique l'unicité. De plus, si $\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ alors $N\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et, par suite, $\varphi \in C^{\infty}_{(p,q-1)}(\overline{M},F)$; et nous avons

$$\| \varphi \|_s \lesssim \| N\psi \|_{s+1} \lesssim \| \psi \|_s \qquad ./.$$

C.Q.F.D.

CHAPITRE IV

$\overline{\partial}$ - COHOMOLOGIE SUR UNE VARIÉTÉ KÄHLÉRIENNE À BORD PSEUDO-CONVEXE : THÉORÈMES DE NULLITÉ.

Le présent chapitre est une première application du théorème (3.2.117) du chapitre précédent.

Nous obtenons ici une représentation de la $\overline{\partial}$ - cohomologie $H_{(p,q)}(M,F)$ par des formes harmoniques $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$, $1 \leqslant q \leqslant n$, sur les variétés kählériennes $M \subset\subset M'$ de dimension complexe n, à $C(F) > 0$ et à bord bM pseudo-convexe de classe C^{∞}.

Nous en déduisons alors une généralisation des théorèmes de nullité de KODAIRA(10)

Notons que nous obtenons également une généralisation d'un théorème de Grauert concernant l'extension des groupes de cohomologie $H_{p,q}(M,F)$ (voir proposition (4.2.6)) et d'un lemme de (1) (voir lemme (4.2.5)).

1 - LA SUITE DE MAYER-VIETORIS.

Soit X un espace topologique ; soient X_1, X_2 deux parties ouvertes telles que

$$X = X_1 \cup X_2$$

Posons

$$X_{1,2} = X_1 \cap X_2$$

Désignons par $H_{(p,q)}(X)$, $H_{(p,q)}(X_1)$, $H_{(p,q)}(X_2)$ et $H_{(p,q)}(X_{1,2})$ les groupes de cohomologie correspondants respectivement.

(4.1.1) Définition : $\forall$ p, et $\forall$ q = 0, 1,..., les applications α_q, β_q et λ_q sont définies comme suit :

(1) $\alpha_q : H_{(p,q)}(X) \longrightarrow H_{(p,q)}(X_1) \oplus H_{(p,q)}(X_2)$

$\alpha_q(s) = s|_{X_1} \oplus s|_{X_2}$, $s \in H_{(p,q)}(X)$;

(2) $\beta_q : H_{(p,q)}(X_1) \oplus H_{(p,q)}(X_2) \longrightarrow H_{(p,q)}(X_{1,2})$

$\beta_q (s_1 \oplus s_2) = s_1 |_{X_{1,2}} - s_2|_{X_{1,2}}$,

$s_i \in H_{(p,q)}(X_i)$ $(i = 1,2)$;

(3) $\lambda_q : H_{(p,q)}(X_{1,2}) \longrightarrow H_{(p,q+1)}(X)$

soit $u \in H_{(p,q)}(X_{1,2})$;

Posons :

$$u_1 = \begin{cases} -\bar{\partial}u & \text{dans } X_2 \\ +\bar{\partial}u & \text{dans } X_1 \end{cases} ,$$

alors $\lambda_q(u) = u_1 \in H_{(p,q+1)}(X)$ ./.

Nous avons le théorème suivant dans ANDREOTTI et HILL (**2** ; p. **343**)

(4.1.2) Théorème : La suite de Mayer-Vietoris.

$$0 \longrightarrow H_{(p,o)}(X) \xrightarrow{\alpha_o} H_{(p,o)}(X_1) \oplus H_{(p,o)}(X_2) \xrightarrow{\beta_o} H_{(p,o)}(X_{1,2})$$

$$\xrightarrow{\lambda_o} H_{(p,1)}(X) \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\lambda_{q-1}} H_{(p,q)}(X) \xrightarrow{\alpha_q} H_{(p,q)}(X_1) \oplus H_{(p,q)}(X_2)$$

$$\xrightarrow{\beta_q} H_{(p,q)}(X_{1,2}) \xrightarrow{\lambda_q} H_{(p,q+1)}(X) \xrightarrow{\alpha_{q+1}} \cdots\cdots$$

est exacte.

2 - REPRESENTATION DE LA $\bar{\partial}$ - COHOMOLOGIE PAR DES FORMES HARMONIQUES SUR UNE VARIETE KÄHLERIENNE A BORD PSEUDO-CONVEXE.

Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte , relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n, à bord bM pseudo-convexe de classe C^∞.

Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Nous supposerons dans toute la suite que la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une $(1,1)$-forme réelle d-fermée $\gamma = (i/2\pi)\, X_{\alpha\bar{\beta}}\, dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}$ "suffisamment définie positive".

Considérons sur $M \subset\subset M'$ les espaces vectoriels suivants :

$$(4.2.1)\quad H_{(p,q)}(M,F) = \frac{\{\, \psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(M,F) \mid \bar{\partial}\psi = 0 \,\}}{\bar{\partial}\, C^{\infty}_{(p,q-1)}(M,F)} \;;$$

$$H_{(p,q)}(\bar{M},F) = \frac{\{\, \psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\bar{M},F) \mid \bar{\partial}\psi = 0 \,\}}{\bar{\partial}\, C^{\infty}_{(p,q-1)}(\bar{M},F)} \;;$$

$$H^{L}_{(p,q)}(M,F) = \frac{\{\, \psi \in \mathcal{D}'^{T}_{(p,q)}(M,F) \mid T\psi = 0 \,\}}{T\,(\mathcal{D}'^{T}_{(p,q-1)}(M,F))}$$

Alors en vertu du théorème (3.2.117), on a

$$H^{L}_{(p,q)}(M,F) \simeq \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)\;,\quad 1 \leq q \leq n.$$

Mais puisque $C^{\infty}_{(p,q)}(\bar{M},F)$ est dense dans $W^{o}_{(p,q)}(\bar{M},F)$ et que l'opérateur H est borné, $H\{C^{\infty}_{(p,q)}(\bar{M},F)\}$ est dense dans $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$, $1 \leq q \leq n$.

Ainsi, $H\{C^{\infty}_{(p,q)}(\bar{M},F)\} = \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$ car on a

$H\{C^{\infty}_{(p,q)}(\bar{M},F)\} \subset \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$, $1 \leq q \leq n$ et

$\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$, $1 \leq q \leq n$, est de dimension finie ; il s'en suit que l'on a :

$$(4.2.2)\qquad H_{(p,q)}(\bar{M},F) \simeq \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)\;,\quad 1 \leq q \leq n.$$

Nous avons dans KOHN[12] le

(4.2.3) Lemme : Si $\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(M,F)$, si $\overline{\partial}\psi \in W^{o}_{(p,q+1)}(\overline{M},F)$ et si le support de ψ est contenu dans un voisinage étoilé (voir (3.2.6)) alors on a :

$$H\,\overline{\partial}\psi = 0$$

Démonstration.

Pour λ voisin de 1, définissons sur le voisinage étoilé la forme $S_{\lambda}(\psi)$ comme au (3.2.8) et posons $S_{\lambda}(\psi) = 0$ à l'extérieur de ce voisinage . Alors , $S_{\lambda}(\psi) \in C^{\infty}_{p,q)}(\overline{M},F)$ et $\overline{\partial}\psi = \lim_{\lambda\to 1} \overline{\partial}\ (\frac{1}{\lambda}\ S_{\lambda}(\psi))$, où la limite converge dans $W^{o}_{(p,q+1)}(\overline{M},F)$.Il s'en suit que

$$H\,\overline{\partial}\,\psi = \lim_{\lambda\to 1} H\left[\ \overline{\partial}\ (\frac{1}{\lambda}\ S_{\lambda}(\psi)\ )\right] = 0\ .$$

(4.2.4) Lemme : Sous les hypothèses du théorème (3.2.117) , si $\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(M,F)$, $1 \leqslant q \leqslant n$, $\overline{\partial}\psi = 0$ et si $x \in bM$, alors il existe un voisinage U de x et une forme différentielle β sur U telle que :

$$\psi = \overline{\partial}\beta \qquad \text{sur } U \cap M\ .$$

Démonstration.

Soit $M_o \subset\subset M'$ une variété kählérienne à bord b M_o de classe C^{∞} pseudo-convexe telle que $M_o \subset M$, $(bM_o) \cap (bM)$ contient un voisinage (dans le bord) de x et telle qu'il existe un voisinage U de x (dans M') qui est étoilé sur M et sur M_o.

D'après le lemme de Poincaré pour $\overline{\partial}$, il existe une forme β' telle que $\overline{\partial}\beta' = \psi$ sur $U \cap M$.

Soit H_{M_o} l'opérateur de projection harmonique sur M_o. En vertu du lemme (4.2.3) ci-dessus, on a

$$H_{M_o}(\overline{\partial}\beta') = 0\ ;\ \text{par suite sur } M_o \text{ on a :}$$

$$\psi = \overline{\partial} \int_a N_{M_o}(\psi).$$

Ainsi, on choisit un voisinage U de x tel que

$$U \cap M = U \cap M_o$$

Alors, la forme β demandée est toute forme différentielle sur U qui est égale à $\int_a N_{M_o}(\psi)$ sur $U \cap M$ ./.

(4.2.5) Lemme : Soit $M \subset\subset M'$ une sou-variété ouverte, relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n, à bord bM de classe C^∞ pseudo-convexe . Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Supposons que la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma = (i/2\pi)\, X_{\alpha\overline{\beta}}\, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$ "suffisamment définie positive". Alors, on peut choisir un recouvrement fini de bM par des ouverts $\{ U_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant t$, dans M' et une suite croissante d'ouverts relativement compacts dans M' , $\{M_j\}$, $0 \leqslant j \leqslant t$, tels que :

(1) $M = M_o \subset M_1 \subset \ldots\ldots \subset M_t$; $M_o \subset\subset M_t$;

$M_i - M_{i-1} \subset\subset U_i$, $1 \leqslant i \leqslant t$;

(2) $H_{(p,q)}(U_i \cap M_j, F) = 0$, $1 \leqslant q \leqslant n$; $1 \leqslant i \leqslant t$; $o \leqslant j \leqslant t$ ./.

Démonstration

Soit U un voisinage de bM dans M' et ψ une fonction C^∞ sur U telle que

$$M \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) < 0 \}$$

et $\psi(x) > 0$ sur $U \cap (M' - \overline{M})$.

On peut choisir un recouvrement $\mathcal{U} = \{ U_i\}, 1 \leqslant i \leqslant t$, de bM tel que $U_i \subset\subset U$ et que U_i possède la propriété de U dans le lemme (4.2.4).

Soient ρ_i des fonctions de classe C^∞ sur U telles que :

$\rho_i \geqslant 0$, supp $\rho_i \subset\subset U_i$; $\sum \rho_i(x_o) > 0$, $\forall\, x_o \in bM$.

Posons $\psi_i = \varepsilon_i \rho_i$, $\varepsilon_i > 0$.

Considérons les fonctions $h_r = \psi - \sum_{i=1}^{r} \psi_i$, pour $1 \leqslant r \leqslant t$.

Les ensembles $M_r = \{x \in U \mid h_r(x) < 0 \}$ sont relativement compacts dans M'.

Par un choix convenable des ε_i (par exemple si les ε_i sont suffisamment petits) $U_i \cap M_r$ est étoilé et, du lemme (4.2.4),on déduit que :

$$H_{(p,q)}(U_i \cap M_r, F) = 0 \quad , 1 \leqslant q \leqslant n.$$

De plus, on a :

$$M = M_o \subset M_1 \subset \cdots \subset M_t \; ; \quad M_i - M_{i-1} \subset\subset U_i \; , \quad 1 \leqslant i \leqslant t \; ;$$

$$M_o \subset\subset M_t \quad ./.$$

C.Q.F.D.

(4.2.6) Proposition : Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte, relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n, à bord bM de classe C^∞ pseudo-convexe. Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'.

Supposons que la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma = (i/2\pi) \, X_{\alpha\bar{\beta}} \, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ "suffisamment définie positive". Alors, il existe un ouvert $M'' \subset M'$ tel que $\overline{M} \subset M''$ et que la restriction

$$H_{(p,q)}(M'', F) \longrightarrow H_{(p,q)}(M, F) \quad , \; 1 \leqslant q \leqslant n \; , \text{ est}$$

surjective ./.

Démonstration

Appliquons le lemme (4.2.5) précédent à M ;

Soit $\psi \in H_{(p,q)}(M,F)$; $1 \leqslant q \leqslant n$. Comme on a $\psi|_{M \cap U_1} = 0$, la classe ψ et la classe nulle sur $M_1 \cap U_1$ ont même restriction à $M \cap U_1$.

Ecrivons $M_1 = M \cup (M_1 \cap U_1)$. De la suite de Mayer-Vietoris (4.1.2), on déduit qu'il existe $\psi_1 \in H_{(p,q)}(M_1, F)$ telle que $\psi_1|_M = \psi$

On opére sur M_1, U_2, M_2 comme sur M, U_1, M_1 et on trouve $\psi_2 \in H_{(p,q)}(M_2, F)$ telle que $\psi_2|_{M_1} = \psi_1$.

Ainsi de suite, on construit une classe $\psi_t \in H_{(p,q)}(M_t, F)$ telle que $\psi_t|_M = \psi$.

Comme $M \subset\subset M_t$, il suffit de prendre M'' tel que $M \subset\subset M'' \subset M_t$.

C.Q.F.D.

Nous donnons pour $q \geqslant 2$, comme (12) la démonstration du lemme ci-dessous. Le cas $q = 1$ se traite d'une manière analogue à celle de KOHN et ROSSI (15) (voir chapitre V).

(4.2.7) Lemme : Sous les hypothèses de la proposition (4.2.6) ,

Si $\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leqslant q \leqslant n$, et s'il existe $\alpha \in C^{\infty}_{(p,q-1)}(M,F)$ telle que $\psi = \overline{\partial}\alpha$, alors il existe $\lambda \in C^{\infty}_{(p,q-1)}(\overline{M},F)$ telle que $\psi = \overline{\partial}\lambda$ ./.

Démonstration : (pour $q \geqslant 2$)

Soit $\{V_i\}$, $i = 1,\ldots k$, un recouvrement fini de $\overline{M}$ tel que pour chaque V_i il existe un ouvert $U_i \supset \overline{V}_i$, tel que U_i possède la propriété de U dans le lemme (4.2.4). Soit $M_1 \subset\subset M'$ une variété kählérienne à bord pseudo-convexe de classe C^{∞} , telle que :

$$M \cup (V_1 \cap bM) \subset M_1 \subset \bigcup_{i=1}^{i=k} V_i$$

et telle que $M_1 - U_1 = M - U_1$.

Soit maintenant β_1 la forme sur U_1 telle que $\psi = \overline{\partial}\beta_1$.
Alors $\overline{\partial}(\alpha-\beta_1) = 0$; par suite, il existe une forme γ_1 sur U telle que

$$\overline{\partial}\gamma_1 = \alpha - \beta_1.$$

Soit f_1 une fonction C^{∞} sur M' qui est égale à 1 sur V_1 et dont le support est contenu dans U_1. Soit α_1 une forme sur M_1 définie par

$$\alpha_1 = \alpha - \overline{\partial}(f_1 \gamma_1).$$

Alors, $\alpha_1 = \beta_1$ sur V_1 et $\overline{\partial}\beta_1 = \psi$ sur M.

Par un raisonnement analogue au précédent, en utilisant α_1, M_1, V_2 et U_2 à la place de α, M, V_1 et U_1 respectivement, on obtient une forme α_2 sur M_2 telle que $\overline{\partial}\alpha_2 = \psi$ sur M. En itérant k fois ce raisonnement, on obtient $\lambda = \alpha_k$ sur M_k telle que $\overline{\partial}\alpha_k = \psi$ sur M.
Puisque $M_k \supset \overline{M}$, le lemme est démontré ./.

De la proposition(4.2.6) et du lemme (4.2.7) ci-dessus découle le théorème suivant :

(4.2.8) Théorème : Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte, relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n, à bord bM de classe C^∞ pseudo-convexe . Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M' . Supposons que la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma = (i/2\pi)\, X_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$ "suffisamment définie positive". Alors :

$$H_{(p,q)}(\bar M,F) \simeq H_{(p,q)}(M,F) \simeq \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F) \quad , 1 \leq q \leq n \quad ./.$$

Maintenant, si $\psi \in H\left(C^\infty_{(p,q)}(\bar M,F) \right)$, $1 \leq q \leq n$, on a $\square_a \psi = 0$; par suite, en vertu du lemme (3.2.58), $\psi = 0$. Ainsi $H\left(C^\infty_{(p,q)}(\bar M,F) \right) = \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F) = 0$, $1 \leq q \leq n$; d'où, compte tenu du théorème (4.2.8) ci-dessus :

$$H_{(p,q)}(M,F) = 0 \ , \ 1 \leq q \leq n.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème de nullité suivant :

(4.2.9) Théorème : Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte , relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n , à bord bM de classe C^∞ pseudo-convexe. Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'.
Si la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma = (i/2\pi)\, X_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$ "suffisamment définie positive" alors :

$$H_{(p,q)}(M,F) = 0, \ 1 \leq q \leq n \quad ./.$$

Soit maintenant $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n, à bord bM de classe C^∞ . Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Soit $\{U_j\}$ un recouvrement de $\bar M$ par des ouverts de coordonnées holomorphes U_j (dans M') au-dessus desquels le fibré F est trivial. Alors, en vertu du théorème (1.2.45) $\forall\, \psi \in \mathcal{D}_{(o,q)}(\bar M,F)$ (voir 3.2.22)), on a localement :

$$\square_a \psi_{j\,\bar B} = -\sum g^{\bar\beta\alpha}\, \nabla^{(a)}_\alpha \nabla_{\bar\beta}\, \psi_{j\,\bar B} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{\tau} (X^{\bar\tau}_{\bar\beta_k} - R^{\bar\tau}_{\bar\beta_k})\, \psi_{j\,\bar\beta_1 \ldots (\bar\tau)_k \ldots \bar\beta_q}$$

Ainsi, si la matrice hermitienne $X_{\alpha\overline{\beta}} - R_{\overline{\beta}\alpha}$ est définie positive en chaque point $x \in M'$ et si le bord bM de M est pseudo-convexe de classe C^∞, le théorème (3.2.74) est également vrai pour $\mathscr{D}_{(o,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leqslant q \leqslant n$; par suite le théorème (3.2.117) est vrai pour $W^o_{(o,q)}(\overline{M},F)$. De plus, d'après une démonstration analogue à celle du théorème (4.2.8), on a :

$$H_{(o,q)}(\overline{M},F) \simeq H_{(o,q)}(M,F) \simeq \mathscr{K}_{(o,q)}(M,F) \quad , 1 \leqslant q \leqslant n ;$$

d'où en vertu du lemme (3.2.58) on a $H_{(o,q)}(M,F) = 0$, $1 \leqslant q \leqslant n$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème de nullité suivant :

(4.2.10) Théorème : Soit $M \subset\subset M'$ une sous variété ouverte, relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n, à bord bM pseudo-convexe de classe C^∞. Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'.
Si la matrice hermitienne $X_{\alpha\overline{\beta}} - R_{\overline{\beta}\alpha}$ est définie positive en chaque point $x \in M'$, alors on a :

$$H_{(o,q)}(M,F) = 0 \quad , 1 \leqslant q \leqslant n./.$$

Soit toujours $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte, relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n, à bord bM de classe C^∞ et soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Le fibré en droites au-dessus de M' défini par les 1-cocycle

$$(4.2.11) \qquad K = \{J_{jk}\} = \frac{\partial(z_k^1,\ldots,z_k^n)}{\partial(z_j^1,\ldots,z_j^n)}$$

par rapport à un recouvrement de M' par des ouverts de coordonnées U_j est appelé le fibré canonique K de M'.
Alors, on voit aisément que l'on a

$$(4.2.12) \qquad \frac{g_j}{g_k} = |J_{jk}|^2$$

La première classe de CHERN $C_1(M')$ de M' est alors (ceci peut être considéré comme une définition)

(4.2.13) $$C_1(M) = -C(K)$$

K^* désignera le fibré dual du fibré canonique K.
On sait que si $\Omega^p(F)$ est le faisceau des germes des p-formes holomorphes à coefficients dans F, on a :

(4.2.14) $$\Omega^o(F) \simeq \Omega^n(F \otimes K^*)$$

Maintenant, si la classe caractéristique $C(F \otimes K^*)$ de $F \otimes K^*$ contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma > 0$ et si, de plus, le bord bM de M est pseudo-convexe de classe C^∞, le théorème (3.2.74) est vrai pour $\mathcal{D}_{(n,q)}(\bar{M}, F \otimes K^*)$ pourvu que $1 \leqslant q \leqslant n$;par suite, le théorème (3.2.117) est vrai pour $W^o_{(n,q)}(\bar{M}, F \otimes K^*)$, $1 \leqslant q \leqslant n$ et l'on a comme précédemment :

$$H_{(n,q)}(\bar{M}, F \otimes K^*) \simeq H_{(n,q)}(M, F \otimes K^*) \simeq \mathcal{H}_{(n,q)}(M, F \otimes K^*) \ , \ 1 \leqslant q \leqslant n$$

D'où, en vertu du lemme (3.2.58), on a

$$H_{(n,q)}(M, F \otimes K^*) = 0 \ , \ 1 \leqslant q \leqslant n.$$

Il s'en suit, d'après (4.2.14), que l'on a

$$H_{(o,q)}(M,F) = 0, \quad 1 \leqslant q \leqslant n.$$

Ainsi, nous avons le théorème suivant :

(4.2.15) Théorème : Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte, relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n à bord bM pseudo-convexe de classe C^∞. Soient F un fibré holomorphe en droites complexes sur M' et K le fibré canonique au-dessus de M'. Si la classe caractéristique $C(F \otimes K^*)$ de $F \otimes K^*$ contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma > 0$, alors on a

$$H_{(o,q)}(M,F) = 0 \ , \ 1 \leqslant q \leqslant n \ ./.$$

CHAPITRE V

DUALITÉ, EXTENSION $\overline{\partial}$ - FERMÉE SUR UNE VARIÉTÉ KÄHLÉRIENNE À BORD PSEUDO-CONVEXE.

Nous montrons dans ce chapitre l'existence d'une sorte de "dualité de Serre" entre $H_{o(n-p,\ n-q)}(M,F^*)$ et $H_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leq q \leq n$, sur une variété kählérienne $M \subset\subset M'$ de dimension complexe n, à $C(F) > 0$ et à bord bM de classe C^∞ pseudo-convexe.

Il en résulte alors en vertu des théorèmes (4.2.8) et (4.2.9) que $H_{o(n-p,\ n-q)}(M,F^*) = 0$, $1 \leq q \leq n$.

Enfin, une solution du problème de BOCHNER pour les sections a été obtenue sur les variétés kählériennes $M \subset\subset M'$ de dimension complexe n, à $C(F) > 0$ et à bord bM de classe C^∞ pseudo-convexe.

1 - PRELIMINAIRES

Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte, relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe , à bord bM de classe C^∞. Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Alors , F^* désignera le fibré dual de F .

Soit $\{U_j\}$ un recouvrement de M' par des ouverts de coordonnées holomorphes U_j au-dessus desquels le fibré F est trivial. La donnée de la métrique hermitienne sur les fibres de F définit un "anti-isomorphisme" (selon la terminologie de ANDREOTTI et VESEBTINI (3)) de F sur F^*.

Si , au-dessus de U_j, les ξ_j sont les coordonnées sur F , alors cet 'anti-isomorphisme" est donné par :

$$\xi_j \longrightarrow \overline{a}_j\,\overline{\xi}_j \tag{5.1.1}$$

Cet "anti-isomorphisme" se prolonge en un "anti-isomorphisme"

$$\# \quad : \quad C^{\infty}_{(p,q)}(M,F) \longrightarrow \quad C^{\infty}_{(q,p)}(M, F^{*}) \quad ,$$

qui est défini localement par :

$$(5.1.2) \qquad (\# \psi)_j = \overline{a}_j \overline{\psi}_j$$

et qui commute avec l'opérateur $*$.

Au moyen de $*$ et $\#$, l'opérateur ϑ_a s'exprime par :

$$(5.1.3) \qquad \vartheta_a = - \#^{-1} * \overline{\partial} * \#.$$

Il résulte de la définition de ϑ_a (1.2.21) que, pour tout $\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ on a :

$$(5.1.4) \qquad \overline{\partial} \# * \psi = (-1)^{p+q} * \# \vartheta_a \psi$$

Soit $\widetilde{C}_{(p,q)}(M,F)$ les formes de type (p,q) à coefficients dans F sur bM , c'est-à-dire qu'un élément de $\widetilde{C}_{(p,q)}(M,F)$ est une section au-dessus de bM du fibré obtenu par restriction à bM du fibré des formes de type (p,q) sur M' à coefficients dans F. Nous noterons R cette restriction.

Alors une forme $\psi \in \widetilde{C}_{(p,q)}(M,F)$ est normale complexe s'il existe $\Psi \in C_{(p,q-1)}(M,F)$

$$(5.1.5) \qquad \psi = \Psi \wedge (R\, \overline{\partial} r).$$

Nous noterons $\widetilde{\mathcal{N}}_{(p,q)}(M,F)$ le sous-espace de $\widetilde{C}_{(p,q)}(M,F)$ qui consiste en des formes normales complexes. Il a été montré dans KOHN et ROSSI[15] que $\widetilde{\mathcal{N}}_{(p,q)}(M,F)$ est indépendant de r.

(5.1.6) Définition : Une forme $\psi \in \widetilde{C}_{(p,q)}(M,F)$ est appelée tangentielle complexe si, pour tout $\Psi \in \widetilde{\mathcal{N}}_{(p,q)}(M,F)$ et tout $x \in bM$, on a (voir (1.2.4)) :

$$(\Psi,\psi)\ (x) = 0$$

Nous désignerons par $\widetilde{\mathcal{E}}_{(p,q)}(M,F)$ le sous-espace de $\widetilde{C}_{(p,q)}(M,F)$ qui consiste en des formes tangentielles complexes. Nous avons alors la décomposition de $\widetilde{C}_{(p,q)}(M,F)$ en somme directe suivante :

$$(5.1.7) \qquad \widetilde{C}_{(p,q)}(M,F) = \widetilde{\mathcal{N}}_{(p,q)}(M,F) \oplus \widetilde{\mathcal{E}}_{(p,q)}(M,F)$$

Soit maintenant

$$(5.1.8) \qquad \mathcal{DC}^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F) = \{ \psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F) : \overline{\partial}r \wedge \psi = 0 \text{ sur } bM \}$$

Nous allons, au moyen de (5.1.7) montrer la dualité des espaces $\mathcal{DC}^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et $\mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, où $\mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ a été défini au (3.2.10) ; plus précisément nous avons dans KOHN et ROSSI[15] la

(5.1.9) Proposition : $\overline{(*\,\mathcal{DC}^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)} = \mathcal{D}^{T^*_a}_{(n-p,n-q)}(\overline{M},F)$

et $\overline{(*\,\mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F)} = \mathcal{DC}^{\infty}_{(n-p,n-q)}(\overline{M},F)$

Démonstration :

Montrons d'abord que si $\psi \in \widetilde{\mathcal{N}}_{(p,q)}(M,F)$, alors $*\,\overline{\psi}$ est orthogonale à $\widetilde{\mathcal{N}}_{(n-p,n-q)}(M,F)$.

$\psi \in \widetilde{\mathcal{N}}_{(p,q)}(M,F) \Longrightarrow \psi = \psi \wedge (R\,\overline{\partial}r)$, d'où

$*\,\overline{\psi} = *\,(\overline{\psi} \wedge (R\,\partial r))$ et si $\beta \in \widetilde{\mathcal{N}}_{(n-p,n-q)}(M,F)$,

alors $\beta = \theta \wedge (R\,\overline{\partial}r)$; par suite

$$\beta \wedge *\,\#(*\,\overline{\psi}) = \pm\, a\,(R\,\overline{\partial}r) \wedge (R\,\overline{\partial}r) \wedge \theta \wedge \psi = 0$$

si bien que $(\beta\,,\, *\,\overline{\psi})\,(x) = 0 \quad \forall\, x \in bM$. Il s'en suit que

$\overline{(*\,\widetilde{\mathcal{N}}_{(p,q)}(M,F))} \subset \widetilde{\mathcal{E}}_{(n-p,n-q)}(M,F)$; et puisque l'application

$\psi \longrightarrow *\,\overline{\psi}$ préserve l'othogonalité

(parce que $(*\,\overline{\psi},\, *\,\overline{\psi})\,(x) = \overline{(\psi,\psi)}\,(x)$, $\forall\, x \in M'$), on a :

$\overline{(* \widetilde{\mathcal{E}}_{(p,q)}(M,F))} \subset \widetilde{\mathcal{D}}_{(n-p,n-q)}(M,F)$; et par suite , puisque l'application $\psi \longrightarrow * \bar{\psi}$ applique $\widetilde{C}_{(p,q)}(M,F)$ sur $\widetilde{C}_{(n-p,n-q)}(M,F)$, on obtient : $\overline{(* \widetilde{\mathcal{D}}_{(p,q)}(M,F)} = \widetilde{\mathcal{E}}_{(n-p,n-q)}(M,F)$ et

$\overline{(* \widetilde{\mathcal{E}}_{(p,q)}(M,F))} = \widetilde{\mathcal{D}}_{(n-p,n-q)}(M,F)$. Il s'en suit que la conclusion souhaitée est alors immédiate.

C.Q.F.D.

(5.1.10) Proposition [14] : $\bar{\partial}\,(\mathcal{DC}^{\infty}_{(p,q)}(\bar{M},F) \subset \mathcal{DC}^{\infty}_{(p,q+1)}(\bar{M},F)$.

Démonstration.

Si $\psi \in \mathcal{DC}^{\infty}_{(p,q)}(\bar{M},F)$, ψ peut s'exprimer comme suit :

$\psi = \bar{\partial} r \wedge \alpha + r\theta$, où $\alpha \in C^{\infty}_{(p,q-1)}(\bar{M},F)$ et $\theta \in C^{\infty}_{(p,q)}(\bar{M},F)$. Alors, $\bar{\partial}\psi = \bar{\partial} r \wedge (\theta-\alpha) + r\,\bar{\partial}\,\theta$, qui est dans $\mathcal{DC}^{\infty}_{(p,q+1)}(\bar{M},F)$ ./.

Il résulte de la proposition (5.1.10) que nous pouvons former la cohomologie

$$(5.1.11) \qquad H_{(p,q)}(\mathcal{DC}) = \frac{\{\psi \in \mathcal{DC}^{\infty}_{(p,q)}(\bar{M},F) : \bar{\partial}\psi = 0\}}{\bar{\partial}\{\mathcal{DC}^{\infty}_{(p,q-1)}(\bar{M},F)\}}$$

Nous pouvons également introduire la cohomologie à valeurs au bord nulles (cohomologie de Dirichlet) :

$$(5.1.12) \qquad H_{o(p,q)}(M,F) = \frac{\{\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\bar{M},F) : \bar{\partial}\psi = 0, \quad \psi|bM = 0\}}{\bar{\partial}\{\psi \in C^{\infty}_{(p,q-1)}(\bar{M},F) : \quad \psi|bM = 0, \bar{\partial}\psi|\,bM = 0\}}$$

Nous avons alors la proposition suivante [15] :

(5.1.13) Proposition : $H_{(p,q)}(\mathcal{DC}) = H_{o(p,q)}(M,F)$.

Démonstration :

Supposons que $\psi \in \mathcal{C}^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $\psi \,|\, bM = 0$ et $\psi = \overline{\partial}\,\varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{H}^{\infty}_{(p,q-1)}(\overline{M},F)$. Comme dans la proposition (5.1.10) écrivons $\varphi = \overline{\partial}\, r\ \alpha + r\theta = \overline{\partial}(r\alpha) + r(\overline{\partial}\alpha + \theta)$. Alors, en posant $\varphi_o = r(\overline{\partial}\alpha + \theta)$, on a $\psi = \overline{\partial}\varphi_o$ et $\varphi_o \,|\, bM = 0$; ainsi, il existe une application injective de $H_{o(p,q)}(M,F)$ dans $H_{(p,q)}(\mathcal{H})$. Montrons maintenant que cette application est surjective . Supposons que $\psi \in \mathcal{H}^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et $\overline{\partial}\psi = 0$; alors $\psi = \overline{\partial}(r\alpha) + r(\theta + \overline{\partial}\alpha)$, d'où ψ est cohomologue à $r(\theta + \overline{\partial}\alpha)$, qui est nulle sur bM ./.

2 - DUALITE

Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte, relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n à bord bM de classe C^{∞} pseudo-convexe Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Supposons que la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma = (i/2\pi)\, X_{\alpha\overline{\beta}}\ dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta}$ "suffisamment définie positive".

(5.2.1) Lemme : Sous les hypothèses du théorème (3.2.117), si $\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ $1 \leqslant q \leqslant n$, alors il existe $\varphi \in \mathcal{D}'^{T^*_a}_{(p,q+1)}(\overline{M},F)$ telle que $\square_a \varphi = \psi$ si et seulement si $\Psi \in \mathcal{D}'^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $\square_a \psi = 0$ et ψ est orthogonale à $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$.

Démonstration :

Si $\varphi \in \mathcal{D}'^{T^*_a}_{(p,q+1)}(M,F)$, alors $T^*_a\ \varphi \in \mathcal{D}'^{T^*_a}_{(p,q)}(M,F)$ et $T^*_a\ T^*_a\ \varphi = 0$. De plus, si $\alpha \in \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$, alors :

$$(T^*_a\, \varphi\ ,\ \alpha) = (\beta,\ T\alpha\ ) = 0.$$

Ainsi la condition est nécessaire.

Si $\psi \in W^{o}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leqslant q \leqslant n$, on a d'après le (2) du théorème (3.2.117) :

$$\psi = T\,T^{*}_{a}\,N\,\psi + T^{*}_{a}\,N\,\psi + H\psi.$$

Alors si $\psi \in \mathcal{D}^{T^{*}_{a}}_{(p,q)}(M,F)$, on a :

$$T\,T^{*}_{a}\,N\,\psi = T\,N\,T^{*}_{a}\,\psi\ ;$$

par suite , $T\,T^{*}_{a}\,N\psi = 0$ quand $T^{*}_{a}\,\psi = 0$. De plus, si ψ est orthogonale à $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$ $(1 \leqslant q \leqslant n)$, on a :

$$H\psi = 0.$$

On en déduit que

$$\psi = T^{*}_{a}(T\,N\,\psi).$$

Ainsi, si $\psi \in \mathcal{D}^{T^{*}_{a}}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leqslant q \leqslant n$, alors en vertu du (4) du théorème (3.2.117), on a $T\,N\,\psi \in \mathcal{D}^{T^{*}_{a}}_{(p,q\neq 1)}(\overline{M},F)$

Posons $\varphi = \overline{\partial}\,N\psi$. Il vient alors

$$\psi = \vartheta_{a}\,\varphi\ ./.$$

C.Q.F.D

Soit $\varphi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $\overline{\partial}\varphi = 0$ et $\psi \in C^{\infty}_{(n-p,n-q)}(\overline{M},F^{*})$ $\psi = 0$ sur bM , $\overline{\partial}\psi = 0$. Définissons une fonctionnelle linéaire

$$\Gamma_{\psi} : \{\ \varphi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F) : \overline{\partial}\varphi = 0\ \} \longrightarrow \mathbb{C}\ ,$$

sur les cocycles par :

$$\Gamma_{\psi}(\varphi) = (\varphi, *\mathcal{H}^{-1}\psi) = \int_{M} \varphi \wedge \psi$$

Cette définition dépend uniquement des classes de cohomologie de φ et ψ car, si $\varphi = \overline{\partial}\theta$, alors, pour une raison de type :

$$d(\theta \wedge \psi) = \overline{\partial}\theta \wedge \psi\ ;$$

si bien que

$$\Gamma_{\psi}(\varphi) = \int_{bM} \theta \wedge \psi = 0,$$

puisque $\psi = 0$ sur bM .

Si $\psi = \overline{\partial}\theta$, où $\theta = 0$ sur bM , alors comme ci-dessus $d(\varphi \wedge \theta) = \varphi \wedge \overline{\partial}\theta$;

si bien que

$$\Gamma_\psi(\varphi) = \int_b \varphi \wedge \theta = 0 \ , \ \forall \varphi \in C^\infty_{(p,q)}(\overline{M},F).$$

Ainsi, la correspondance $\psi \longrightarrow \Gamma_\psi$ induit un homomorphisme de $H_{o(n-p,n-q)}(M, F^*)$ sur le dual de $H_{(p,q)}(\overline{M},F)$.

Si $1 \leqslant q \leqslant n$, cet homomorphisme est bijectif

Montrons d'abord qu'il est injectif.

Soit $\psi \in C^\infty_{(n-p,n-q)}(\overline{M}, F^*)$, $\overline{\partial}\psi = 0$, $\psi = 0$ sur bM et $\Gamma_\psi = 0$. Alors, si $\eta \in C^\infty_{(n-q,n-p)}(\overline{M},F)$ est telle que $\psi = \# \eta$, on a

$$0 = \int_M \varphi \wedge \psi = (-1)^{p+q} \int_M \varphi \wedge * * \psi = (-1)^{p+q} \int_M \psi \wedge * * \# \eta$$

$$= (-1)^{p+q} \int_M \varphi \wedge * \# (* \eta) = (-1)^{p+q} (\psi, *\eta) ;$$

par suite, $* \eta$ est orthogonale à $\mathcal{K}_{(p,q)}(M,F)$ et $* \eta \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q)}(\overline{M},F)$.

D'autre part, on a

$$\overline{\partial} \# * (* \eta) = (-1)^{p+q} * \# \vartheta_a * \eta \ ;$$

par suite :

$$\overline{\partial} \# * (* \eta) = \overline{\partial}\psi = 0 = (-1)^{p+q} * \# \vartheta_a * \eta \ ,$$

d'où $\vartheta_a * \eta = 0$.

Il s'en suit qu'il existe , en vertu du lemme (5.2.1),

$\theta \in \mathcal{D}^{T^*_a}_{(p,q+1)}(\overline{M},F)$ telle que $\vartheta_a \theta = * \eta$.

Ainsi :

$$\# \eta = (-1)^{p+q} * \# \vartheta_a \theta = \overline{\partial} \# * \theta = \overline{\partial} (* \# \theta) ;$$

c'est-à-dire que :

$$\psi = \overline{\partial}(* \# \theta) \text{ et } * \# \theta \in \mathcal{H}^\infty_{(n-p,,-q-1)}(\overline{M}, F^*) .$$

Il résulte de la proposition (5.1.13) que la classe de cohomologie de ψ dans $H_{o(n-p,n-q)}(M, F^*)$ est nulle.

D'où l'homomorphisme est injectif.

Montrons maintenant qu'il est surjectif.

Soit $\varphi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leq q \leq n$, $\overline{\partial}\varphi = 0$, et :

$$\Gamma_{\psi}(\varphi) = o = (-1)^{p+q}(\varphi, *\#^{-1}\psi), \forall \psi \in \mathcal{D}^{\infty}_{(n-p,n-q)}(\overline{M},F^{*}), \text{ avec } \overline{\partial}\psi = 0$$

Soit alors comme précédemment $\eta \in C^{\infty}_{(n-q,n-p)}(\overline{M},F)$ telle que

$$\psi = \# \eta .$$

Alors :

$$\Gamma_{\psi}(\varphi) = 0 = (-1)^{p+q}(\varphi, *\#^{-1}\psi) = (-1)^{p+q}(\psi, *\eta).$$

Par un raisonnement analogue au précédent, on déduit que :

$$* \eta \perp \mathcal{K}_{(p,q)}(M,F) \text{ et } * \eta \in \mathcal{D}\, T^{*}_{a}{}_{(p,q)}(\overline{M},F) \; ; \quad \mathcal{V}_{a} * \eta = 0.$$

Ainsi, on a $\varphi \perp \text{Ker}\,(T^{*}_{a})$.

D'après le théorème (3.2.117), il existe $\theta \in C^{\infty}_{(p,q-1)}(\overline{M},F)$ telle que $\varphi = \overline{\partial}\theta$; par suite, φ est cohomologue à zéro.

Ainsi, compte tenu de la proposition (5.1.13), nous pouvons énoncer le théorème suivant :

(5.2.2) Théorème : Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte, relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n, à bord bM de classe C^{∞} pseudo-convexe. Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Supposons que la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma = (i/2\pi)\, X_{\alpha\overline{\beta}}\, dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta}$ "suffisamment définie positive". Alors $H_{o(n-p,n-q)}(M,F^{*})$ est dual de $H_{(p,q)}(\overline{M},F)$, $1 \leq q \leq n$ ./.

Il résulte du théorème (4.2.8) et du théorème (4.2.9) que :

(5.2.3.) $\quad H_{o(n-p,n-q)}(M,F^{*}) = 0$, $1 \leq q \leq n$ ./.

3 - EXTENSION $\overline{\partial}$ - FERMEE DES SECTIONS.

Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte, relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n, à bord bM de classe C^{∞} pseudo-convexe.

Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Supposons que la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma = (i/2\pi)\, X_{\alpha\overline{\beta}}\, dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta}$ "suffisamment définie positive".

Considérons sur $M \subset\subset M'$ le problème suivant :

Etant donnée une forme Φ de type (p,q) à coefficients dans M sur bM (c'est-à-dire que Φ est la restriction à bM d'un élément de $C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$) existe-t-il $\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ avec :

$$\psi \,|bM = \Phi \quad \text{et} \quad \overline{\partial}\psi = 0 \quad ? \tag{5.3.1}$$

Une condition nécessaire et suffisante est que

$$\overline{\partial}\,\Phi_o \wedge \overline{\partial}\, r = 0\ , \tag{5.3.2}$$

où Φ_o est la projection de Φ sur $\mathcal{B}_{(p,q)}(F)$ (= espace des restrictions des éléments de $\mathcal{D}'^{T^*}_{a\ (p,q)}(\overline{M},F)$ à bM), car ψ peut s'exprimer par :

$$\psi = \psi_o + \psi_1\ ,$$

où $\psi_o \in \mathcal{D}'^{T^*}_{a\ (p,q)}(\overline{M},F)$ et $\psi_1 \in \mathcal{H}^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$.

En utilisant les techniques de démonstration du théorème (2.3.2)' de Hormander (8 ; p.31) , nous avons le théorème suivant :

(5.3.3. Théorème : Soit $M \subset\subset M'$ une sous-variété ouverte , relativement compacte d'une variété kählérienne M' de dimension complexe n , à bord bM de classe C^{∞} pseudo-convexe . Soit F un fibré holomorphe en droites complexes sur M'. Supposons que la classe caractéristique $C(F)$ de F contient une (1,1)-forme réelle d-fermée $\gamma = (i/2\pi)\, X_{\alpha\overline{\beta}}\, dz^{\alpha} \wedge dz^{\beta}$ "suffisamment définie positive".

Alors, pour tout $\varphi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ vérifiant $\overline{\partial}\varphi \wedge \overline{\partial} r = 0$ sur bM , il existe une forme $\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ telle que $\overline{\partial}\psi = 0$ sur M et $\psi = \varphi$ sur bM, $o \leq q \leq n$ ./.

<u>Démonstration</u> :

Soit $\psi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ avec $\overline{\partial}\psi \wedge \overline{\partial}r = 0$ sur bM . On sait que $\overline{\partial}\psi$ peut alors s'écrire sous la forme suivante

(5.3.4) $$\overline{\partial}\psi = \overline{\partial}r \wedge \psi_o + r\,\psi_1$$

Mais $\overline{\partial}(\psi - r\psi_o) = \overline{\partial}\psi - \overline{\partial}r \wedge \psi_o - r\,\overline{\partial}\psi_o$; soit

$$\overline{\partial}(\psi - r\,\psi_o) = r(\psi_1 - \overline{\partial}\psi_o).$$

Posons

(5.3.5) $$\psi_1 - \overline{\partial}\psi_o = \psi_2$$

Il vient alors

(5.3.6) $$\overline{\partial}(\psi - r\,\psi_o) = r\,\psi_2, \text{ avec } \psi_2 \in C^{\infty}_{(p,q+1)}(\overline{M},F).$$

D'autre part , on a

(5.3.7) $$\overline{\partial}(r\,\psi_2) = 0 = \overline{\partial}r \wedge \psi_2 + r\,\overline{\partial}\psi_2 ;$$

D'où sur bM , on a

(5.3.8) $$\overline{\partial}r \wedge \psi_2 = 0 ;$$

c'est-à-dire que ψ_2 est également de la forme

(5.3.9) $$\psi_2 = \overline{\partial}r \wedge \psi_3 + r\,\psi_4,$$

avec $\psi_3 \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ et $\psi_4 \in C^{\infty}_{(p,q+1)}(\overline{M},F)$.

Considérons maintenant la forme

(5.3.10) $$\psi_o = \psi - r\,\psi_o - \frac{r^2}{2}\,\psi_3 .$$

On a :

(5.3.11) $$\overline{\partial}\,\psi_o = r(\psi_1 - \overline{\partial}\psi_o - \overline{\partial}r \wedge \psi_3 - \frac{r}{2}\,\overline{\partial}\psi_3)$$

$$= r^2\left(\psi_4 - \frac{\overline{\partial}\psi_3}{2}\right)$$

Posons

(5.3.12) $\theta = \overline{\partial}\psi_o$

Alors , $\theta \in C^{\infty}_{(p,q+1)}(\overline{M},F)$ et de plus $\overline{\partial}\theta = 0$. Il résulte du théorème (4.2.9) qu'il existe $\Phi \in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{M},F)$ telle que

$$\overline{\partial}\Phi = \theta .$$

La forme $\psi = \psi_o - \Phi$ est alors égale à

$$\psi_o = \emptyset \text{ sur } bM$$

et $\overline{\partial}\psi = \overline{\partial}\psi_o - \overline{\partial}\Phi = \theta - \theta = 0$ sur $\overline{M}$

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

(1) A. ANDREOTTI et H. GRAUERT . Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.
Bulletin S.M. France 90 (1962) ; 193-259.

(2) A. ANDREOTTI and D.C.HILL. E.E. Levi convexity and the Hans Lewy problem I.
Annali Scuol. Normal. Sup.Pisa (1972) , 325 -363.

(3) A. ANDREOTTI and E. VESENTINI. Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equations on complex manifolds.
I.H.E.S. Publication Mathématique N°25, 313-362.

(4) S.S. CHERN : Complex manifolds without potential theory.
Van Nostrand Company Inc. (1967).

(5) S.S. CHERN : Complex manifolds . Textos de Matematica N°5 Inst. de Fisica e Matematica , Recife (1959).

(6) K.O. FRIEDRICHS : The identity of weak and strongextensions of differential operators.
Trans.Amer.Math.Soc. 55(1944) , 132-151.

(7) M.P. GAFFNEY : Hilbert space methods in the theory of harmonic integrals.
Trans. Amer. Math Society. 78 (1955) , 426-444.

(8) L. HÖRMANDER : An introduction to complex analysis in several variables.
Van Nostrand Company, Inc.(1967).

(9) L. HÖRMANDER : L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ -opérator.
Acta Math. 113 (1965) , 89-152.

(10) K. KODAIRA : On a differential geometric method in the theory of analytic stacks.
Proc. Nat.Acad.Sci.U.S.A 39 (1953) , 1268-1273.

(11) K. KODAIRA and J. MORROW . Complex manifods .
Hold, Rinehart and Winston , Inc. (1971).

(12) J.J. KOHN : Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds.I
Annals of Math. 78 (1963) , 112-148.

(13) J.J. KOHN : Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds.
Ann.of Math. 79 (1964) , 450-472.

(14) J.J. KOHN and G.B. FOLLAND : The Neumman problem for the Cauchy-Riemann complex.
Annals of Math.Studies N°75, Princeton University Press.

(15) J.J. KOHN and H. ROSSI : On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold.
Ann. of Math. 81 (1965) 451-472.

(16) J.J. KOHN and D.C. SPENCER : Complex Neumann problems .
Ann. of Math. 66 (1957) 89-140.

(17) L. NIREMBERG : Remarks on strongly elliptic partial differential equations
Comm. Pure Appl.Math. 8 (1955) 648-674.

(18) L. NIREMBERG : On elliptic partial differential equations.
Ann. Scuol.Norm. Sup.Pisa. 13, (1955) , 1-48.

(19) F. RIESZ and B.SZ. NAGY . Functional Analysis , Ungar. New York. 1955.

(20) J.P. SERRE : Un théorème de dualité . Comm. Math. Helv. 29 (1955) 9-26.

(21) A. WEIL . Introduction à l'étude des variétés kählériennes.
Hermann, Paris 1958.

(22) E.M. STEIN and G. WEISS : Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces . Princeton University Press, 1971.

(23) R.O. WELLS : Differential analysis on complex manifolds.
Prentice Hall , 1973.

(24) G. de RHAM : Variétés différentiables. Hermann, Paris , 1960.